مجموعه علوم

نظریه اعداد

تالیف:

پرویز شهریاری

احسان‌الله قوام‌زاده

موسسه انتشارات امیرکبیر

نظریهٔ اعداد

تألیف :

پرویز شهریاری   احسان‌الله قوام‌زاده

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

خداوند فقط اعداد صحیح را خلق کرد
ما بقی ساخته‌ی فکر بشرند.
کرونکر

مقدمه

نظریهٔ اعداد که بخشی از آن تحت عنوان حساب استدلالی درششم متوسطه تدریس می‌گردد یکی ازمنطقی‌ترین وجالب‌ترین قسمتهای ریاضی است. مطالعهٔ آن کمك بسیار در تقویت ذهن و منطقی نمودن نحوهٔ تفکر دانش‌آموزان درحل مسائل ریاضی خواهد نمود. بدین سبب و دیگر سبب آنکه حل مسائلی که دانش‌آموزان در حساب استدلالی‌با آن روبرو هستند بخاطر آنکه مباحث وقضایای این درس بطور خلاصه در برنامه ذکرشده‌اند گاهی مشکل می‌نماید وبا مطالعهٔ‌نظریهٔ اعداد این‌نقیصه‌برطرف می‌شود. بر آن‌شدیم که‌کتاب‌حاضر را دراین‌زمینه‌تهیه و در دسترس طالبین قرار دهیم.

در کتاب، قضایا و مباحث حساب استدلالی بطور دقیق و مفصل مورد بحث قرار گرفته است و مسائل زیادی نیز برای تفهیم به دقت انتخاب و حل گردیده است . علاوه بر این بخاطر آنکه اغلب مسائل حساب استدلالی منجر به حل معادلات سیال می‌گردد ، فصل سوم را به معادلات سیال اختصاص داده و بطور کامل دربارهٔ حل معادلاتی که اغلب با آنها روبرو هستیم گفتگو شده است . همچنین راجع به کسرهای مسلسل که یکی ازمباحث ضروری ریاضی بوده و تاکنون هیچ جا از آن بطور اصولی ذکری به میان نیامده است درفصل دوم کتاب مفصلاً صحبت گردیده است .

در پایان از همکاری دوستان ارجمندمان آقای دکتر محمد رضا سلطانپور و آقای مهندس احمد فیاض صمیمانه تشکر می‌نماییم .

مؤلفین

اسفند ماه ۱۳۵۰

فهرست مطالب

عنوان		صفحه
	فصل اول ـ نظریهٔ اعداد	

عنوان		صفحه
۳۱-	همنهشتیهای خطی	۷۴
۳۲-	همنهشتیهای با اساس اعداد مرکب	۷۹
۳۳-	« جبری	۸۳
۳۴-	« « با اساس عدد اول	۸۵
۳۵-	یك قضیه روی کسرها	۸۶
۳۶-	محاسبهٔ ریشهٔ mام و جذر	۹۲

فصل دوم ـ کسرهای مسلسل

عنوان	صفحه

صفحه	عنوان

معادلات درجه سوم

معادلات درجه چهارم

فصل ۱

نظریهٔ اعداد

نظریهٔ اعداد

A‐۱ موضوع نظریهٔ اعداد مطالعه و بررسی خواص اعداد صحیح می‌باشد. منظور از اعداد صحیح فقط اعداد طبیعی ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . . (اعداد صحیح مثبت) نیست بلکه صفر و اعداد منفی ۱− ، ۲− ، ۳− ، . . . . نیز می‌باشد .

در این متن N مجموعهٔ **اعداد صحیح** حسابی و Z مجموعهٔ اعداد نسبی ، Q مجموعهٔ اعداد گویای نسبی ، R مجموعهٔ تمام اعداد نسبی (که **اعداد حقیقی** نیز نامیده می‌شود) می‌باشد .

$$N=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

$$Z=\{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

مجموعه‌های قبل‌را وقتی که دارای عدد صفر نباشند به ترتیب با : R^* ، Q^* ، Z^* و N^* نمایش می‌دهند .

$N^*=\{1,2,3,\ldots\}$. مجموعهٔ **اعداد صحیح طبیعی** را نمایش میدهد .

مجموع ، تفاضل و حاصلضرب دو عدد صحیح نیز عدد صحیح می‌باشد

ولی خارج قسمت آنها ممکن است عدد صحیح باشد و یا نباشد .

ما $|x|$ را برای نشان دادن مقدار عددی (قدر مطلق) x بکار می‌بریم .

در اینصورت :

$$|x|=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } x=۰ \\ x & \text{اگر } x>۰ \\ -x & \text{اگر } x<۰ \end{cases}$$

اگر x عددی مخالف صفر باشد $sgn x$ را برای نمایش $x/|x|$ بکار می‌بریم و داریم :

$$sgn\, x=\begin{cases} +۱ & \text{اگر } x>۰ \\ -۱ & \text{اگر } x<۰ \end{cases} \qquad |x|=x\,sgn x$$

B ـ اگر نسبت دو عدد a و b عددصحیح q باشد داریم $a=bq$ یعنی a مساویست با حاصلضرب b ویك عدد صحیح ومی گوئیم که a بر b بخش‌پذیر و یا b عدد a را عاد می کند . در این‌حال a مضربی‌است از b و b مقسوم‌علیه a می‌باشد و می‌نویسیم $b|a$ یعنی b عدد a را عادمی‌کند و خلاف آن را با $b \nmid a$ نمایش می‌دهند یعنی b عدد a را عاد نمی‌کند .

۲ـ اگر a مضربی از m و m مضربی از b باشد در این صورت a مضربی از b می‌باشد .

چون از $a=a_۱m$ و $m=m_۱b$ نتیجه می‌شود $a=a_۱m_۱b$

۳ـ اگردرتساوی به فرم: $k+l+\dots+m=p+q+\dots+s$ تمام جملات غیر از یکی از آنها مضربی از b باشند جملهٔ باقیمانده نیز مضربی از b است .

اگر فرض‌کنیم k جملهٔ فوق باشد داریم :

$$l=l_۱b \;\text{،}\dots\; n=n_۱b \;\text{،}\; p=p_۱b \;\text{،}\; q=q_۱b \;\text{،}\; s=s_۱b$$

$$k=p+q+\dots+s-l-\dots-n=$$
$$=(p_۱+q_۱+\dots+s_۱-l_۱-\dots-n_۱)b$$

که اثبات قضیه می‌باشد .

۴ـ تقسیم (۱) ـ اگر b عدد صحیح و مثبتی باشد و دنباله :

$$\dots\ -۳b,\ -۲b,\ -b,\ ۰,\ b,\ ۲b$$

که از دوطرف نامحدود است درنظر میگیریم هرعدد صحیح a (مثبت ، منفی و یا صفر) جمله‌ای از این دنباله و یا بین دو جملهٔ متوالی آن قرارگرفته است بنابراین دوعدد یکتا q ، r را می‌توان طوری معین کرد که :

$$a=bq+r, \qquad ۰\leqslant r<b \dots\dots (A)$$

لذا با تقسیم a بر b اعداد r،q که صادق درشرایط‌فوق می‌باشندعاید می‌شود q را **خارج قسمت** و r را **باقیمانده** می‌نامند .

چنانچه $r=۰$ باشد ، در این‌حال a بر b **بخش‌پذیر** و یا **مضربی** از b است و b را **مقسوم‌علیه** و یا **فاکتور** a گویند و یا می گویند b عدد a را عادمی‌کند مثلاً ۲و۳ عدد ۱۲ راعاد می‌کنند درمیان مقسوم‌علیه‌های یك عدد، عدد یك و خود عدد را می‌توان درنظر گرفت .

چون بازاء جمیع مقادیر b می‌توان‌نوشت $۰=۰\times b+۰$ بنابراین ۰ بر هرعدد صحیح بخش‌پذیر است .

(۲)ـ اگر فرض‌کنیم $r=b-r'$ داریم :

$$a=b(q+۱)-r'; \qquad ۰\leqslant r'<b;$$

اگـر $r\geqslant\frac{۱}{۲}b$ پس $r'\leqslant\frac{۱}{۲}b$ و ازآنجا همواره می‌توان اعداد P و Q را طوری پیداکردکه :

$$a=bQ+R \quad \text{و} \quad |R|\leqslant\frac{۱}{۲}b.$$

مثال ۱ـ ثابت‌کنیدکه هر عدد بفرم $۵n$ ، $۵n\pm۱$ ، $۵n\pm۲$ می‌باشد .

مثال ۲ـ ثابت‌کنید مربع هرعدد بفرم $۵n$ و یا $۵n\pm۱$ می‌باشد .

مثال ۳ـ ثابت‌کنید مربع هرعدد فرد بصورت $۸n+۱$ می‌باشد .

(۳) ـ قضایای تقسیم :

اولاً ـ اگراعداد a ، b هردوبر c بخش‌پذیرباشند $ma\pm nb$ نیز بر c بخش‌پذیر است .

ثانیاً ـ اگر r باقیماندهٔ تقسیم a بر b باشد cr باقیماندهٔ تقسیم ca بر cb خواهد بود.

چون $a=bq+r, \quad 0\leqslant r<b$.

$ca=(cb)q+cr. \quad 0\leqslant cr<cb$

ثالثاً ـ اگر a و b بر c بخش‌پذیر باشند و r باقیماندهٔ تقسیم a بر b باشد در این صورت :

الف : r بر c بخش‌پذیر است .

ب : r/c باقیماندهٔ تقسیم a/c بر b/c می‌باشد که از بند ۳ فوراً نتیجه می‌شود .

ه‍ـ باقیمانده‌ها

A ـ باقیماندهٔ تقسیم مجموع چندعدد بریك عدد مساویست با باقیماندهٔ تقسیم مجموع باقیمانده‌ها بر آن عدد :

$$\left.\begin{array}{l} a_1=bq_1+r_1 \\ a_2=bq_2+r_2 \\ a_3=bq_3+r_3 \end{array}\right\} \quad r_i<b \,،\, i=1\,،\,2\,،\,3\,،\,\ldots \quad \text{(I)}$$

....

$$\Sigma a_i=b\Sigma q_i+\Sigma r_i, \quad i=1\,،\,2\,،\,3\,،\,\ldots$$

با فرض $\Sigma q_i=q$ داریم :

$$\Sigma a_i=b\cdot q+\Sigma r_i \text{ :}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

در رابطهٔ (B) یا $\Sigma r_i<b$ و یا $\Sigma r_i>b$ اگر حالت اخیر باشد می‌توان نوشت :

$\Sigma r_i=b\cdot q'+r$ و از آنجا $\Sigma a_i=b\cdot q+bq'+r$ و یا

$\Sigma a_i=(q+q')b+r$ پس درهر صورت باقیماندهٔ تقسیم مجموع چندعدد بریك عددمساویست با باقیماندهٔ تقسیم مجموع باقیمانده‌ها بر آن عدد .

B ـ باقیماندهٔ حاصلضرب چند عدد بریك عدد مساویست با باقیماندهٔ تقسیم حاصلضرب باقیمانده‌ها بر آن عدد

از دستگاه (I) می‌توان نوشت :

$$\Pi a_i = b\overbrace{\text{مضرب}}^{q} + \Pi r_i \qquad i=۱, ۲, ۳, \dots \qquad (C)$$

اگر $\Pi r_i < b$ باشد حکم ثابت و اگر بزرگتر از b باشد می‌توان نوشت:

$$\Pi r_i = b\cdot q' + r$$

و ازآنجا :

$$\Pi a_i = b(q+q') + r$$

و حکم ثابت است .

تبصرهٔ ۱ـ اگر یکی از باقیمانده‌ها صفر شود حاصلضرب بر b بخش‌پذیر است .

تبصرهٔ ۲ ـ اگر در رابطهٔ (C) تمام a_iها مساوی باشند r_iها هم مساوی شده وبافرض $a_۱ = a_۲ = \dots = a_n = a$ و $r_۱ = r_۲ = \dots = r_n = r$ خواهیم داشت :

$$a^n = b\text{مضرب} + r^n \ .$$

یعنی باقیماندهٔ تقسیم a^n بر b مساویست با باقیماندهٔ تقسیم r^n بر b .

مثال ۱ـ باقیماندهٔ تقسیم $۵۴۷۲^{۱۲۸}$ را بر ۷ پیدا کنید .

$$۵۴۷۲^{۱۲۸} = ۷\text{مضرب} + ۵^{۱۲۸}$$

$$۵^{۱۲۸} = (۵^۴)^{۳۲} = ۶۲۵^{۳۲} = ۷\text{مضرب} + ۲^{۳۲}$$

$$۲^{۳۲} = (۲^۸)^۴ = ۷\text{مضرب} + ۴^۴ = ۷\text{مضرب} + ۴;$$

پس باقیماندهٔ تقسیم مساوی ۴ است .

مثال ۲ـ محاسبهٔ باقیماندهٔ $(۲۴۵۶)^۵$ بر ۴۷ و $(۳۹)^{۳۲}$ بر ۱۷.

Cـ خارج قسمت تقریبی تا $\frac{۱}{۱۰^n}$ تقریب دوعدد صحیح یاکسری ویا اعشاری a ، b چنانچه $\frac{x}{۱۰^n}$ این خارج قسمت فرض شود درنامساوی زیر صدق می‌کند .

$$b\times\frac{x}{۱۰^n} \leqslant a < b\times\frac{x+۱}{۱۰^n} \ ,$$

Dـ خارج قسمت تقریبی تا $\frac{p}{q}$ تقریب دوعدد a ،b چنانچه $x \times \frac{p}{q}$ این خارج قسمت فرض شود درنامساوی زیر صدق می‌کنند :

$$b \times x \times \frac{p}{q} \leqslant a < b \times (x+۱) \frac{p}{q} ,$$

مثال ۱ـ ازتقسیم عدد صحیح $a-۱$ بر b خارج قسمت q عاید می‌شود. مطلوبست خارج قسمت $ab^n-۱$ بر $b^{n+۱}$.

در این‌جا طبق رابطهٔ تقسیم داریم :

$$bq \leqslant a-۱ < b(q+۱),$$

پس
$$bq < a \leqslant b(q+۱) ،$$

درنتیجه
$$b^{n+۱}q < ab^n \leqslant b^{n+۱}(q+۱),$$

$$b^{n+۱}q \leqslant ab^n-۱ < b^{n+۱}(q+۱),$$

رابطهٔ اخیر ثابت می‌کندکه خارج قسمت برابر q می‌باشد .

مثال ۲ـ مطلوبست دو عدد صحیح a و b بطوریکه b یك رقمی بوده و خارج قسمت تا ۱ ,۰ تقریب نقصانی a بر b مساوی ۳ ,۴ باشد .

بنا به فرض می‌توان نوشت :

$$\frac{۴۳}{۱۰} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{۴۴}{۱۰} ,$$

$$\frac{۴۳b}{۱۰} \leqslant a < \frac{۴۴b}{۱۰} ,$$

وچون $b \neq ۰$ است پس b یکی از اعداد ۱،۲،۳، ...، ۹ می‌تواند باشد در نتیجه نامساویهای زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۴۳}{۱۰} \leqslant a < \frac{۴۴}{۱۰} \quad (۱) , \qquad \frac{۸۶}{۱۰} \leqslant a < \frac{۸۸}{۱۰} \quad (۲) ,$$

$$\frac{۱۲۹}{۱۰} \leqslant a < \frac{۱۳۲}{۱۰} \quad (۳) , \qquad \frac{۱۷۲}{۱۰} \leqslant a < \frac{۱۷۶}{۱۰} \quad (۴) ,$$

$$\frac{۲۱۵}{۱۰} \leqslant a < \frac{۲۲۰}{۱۰} \quad (۵) , \qquad \frac{۲۵۸}{۱۰} \leqslant a < \frac{۲۶۴}{۱۰} \quad (۶) ,$$

$\frac{۳۰۱}{۱۰} \leqslant a < \frac{۳۰۸}{۱۰}$ (۷)، $\frac{۳۴۴}{۱۰} \leqslant a < \frac{۳۵۲}{۱۰}$ (۸)،

$\frac{۳۸۷}{۱۰} \leqslant a < \frac{۳۹۶}{۱۰}$ (۹)،

نامساوی‌های (۱) ، (۲) ، (۴) ، (۵) ، (۷) غیر ممکن می‌باشند . بازاء نامساوی‌های دیگری برای a مقادیر ۱۳ ، ۲۶ ، ۳۵ و ۳۹ حاصل می‌شود و در نتیجه مقدار کسر $\frac{a}{b}$ مساوی‌است با : $\frac{۱۳}{۳}$ ، $\frac{۲۶}{۳}$ ، $\frac{۳۵}{۸}$ ، ... $\frac{۳۹}{۹}$ که خلاصهٔ آنها $\frac{۱۳}{۳}$ و $\frac{۳۵}{۸}$ می‌باشد .

مثال ۳ـ اعدادی را پیدا کنید که چون ۴۳۲۷۵ را بر آنها تقسیم کنیم خارج قسمت تقریبی نقصانی تا واحد تقریب مضرب صد باشد .

در این‌جا می‌توان نوشت :

$$۱۰۰k \leqslant \frac{۴۳۲۷۵}{b} < ۱۰۰k + ۱۰،$$

$$۱۰۰kb \leqslant ۴۳۲۷۵ < ۱۰۰kb + b ،$$

با استفاده از رابطهٔ تقسیم $۴۳۲۷۵ = ۱۰۰kb + r$ که در آن $r < b$ است پس :

$$b \cdot k = \frac{۴۳۲۷۵ - r}{۱۰۰} = ۴۳۲ + \frac{۷۵ - r}{۱۰۰}$$

از رابطهٔ اخیر داریم :

$$r = ۷۵،۱۷۵،۲۷۵;۳۷۵ \Longrightarrow b \cdot k = ۴۳۲،۴۳۱،۴۳۰;۴۲۹$$

$$b = ۱۰۸،۱۴۴،۲۱۶،۴۲۹،۴۳۰،۴۳۱;۴۳۲$$

تمرین

۱ ـ مطلوبست بین ۲۰۰۰۰ و ۳۵۰۰۰ کوچکترین و بزرگترین عدد صحیحی که باقیماندهٔ تقسیم آن بر هریك ازاعداد ۵۴،۳۶ و ۹۰ برابر ۱۲ باشد.

(جواب ۳۴۵۷۲ و ۲۰۵۳۲)

۲ ـ اگر ۴۳۷۳ و ۸۲۶ را بریك عدد تقسیم کنیم باقیمانده ۸ و ۷ بدست می‌آید این عدد کدام است (جواب : ۹)

۳ ـ کوچکترین عددی را پیدا کنید که در تقسیم بر ۲۷ ، ۳۹ ، ۴۵ باقیمانده‌های ۱۱، ۲۳، ۲۹ تولید می‌نماید . (جواب : ۱۷۷۱)

۴ـ مطلوبست تعیین کوچکترین عدد صحیحی مانند x بقسمی که اگر یك واحد از آخرین رقم سمت چپ آن که a فرض می‌کنیم کم کنیم و سپس به‌عدد حاصل یك‌واحداضافه نمائیم عددی حاصل‌شود برابر با ضرب $(a+۲)$ در عدد دیگری که ازحذف رقم a از عدد اصلی x به دست می‌آید .
(کنکور فنی ۱۳۴۶)

عدد را به صورت $x=\overline{aN}$ فرض می‌کنیم در این‌صورت معادلهٔ زیررا می‌توان نوشت :

$$\overline{(a-۱)N}+۱=(a+۲)\times N ،$$

و یا $(a-۱)۱۰^n+N+۱=(a+۲)N$ (N عدد n رقمی‌فرض‌شده‌است)

$$N=\frac{(a-۱)۱۰^n+۱}{a+۱}$$

واضح است که در این رابطه a عدد فرد نمی‌تواند باشد و در ضمن اگر $a=۲، ۴، ۸$ نیز باشد N عدد صحیح نمی‌شود پس $a=۶$ می‌باشد و درنتیجه

$$N=\frac{۵\times ۱۰^n+۱}{۷}$$

حال به n مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ... را می‌دهیم ملاحظه می‌شود که بازاء $n=۴$ کوچکترین جواب $N=۷۱۴۳$ بدست می‌آید پس $x=۶۷۱۴۳$

۵ـ مطلوبست محاسبهٔ عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ باشرط :

$$\overline{mcdu}=(m+c+d+u)^۴$$ (جواب : ۲۴۰۱)

۶ـ مطلوبست تعیین عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ باشرط :

$$m\times c\times d\times u=(c-d)^۳$$

(جواب : ۴۹۳۲ ، ۸۹۳۱، ۲۹۳۴، ۱۹۳۸، ۲۸۴۱، ۱۸۴۲، ۱۴۲۱)

۷ـ محاسبهٔ عدد چهاررقمی $\overline{abcd}$ باشرط :

$$(۱)\qquad \overline{abcd}\times ۹=\overline{dcba}\ .$$

$$(۲)\qquad \overline{abcd}+a+b+c+d=۲۶۰۳;$$

$$(۳)\qquad \overline{abcd}=(\overline{ac})^{۳}+(\overline{ad})^{۲}\ .$$

(جواب : ۱) ۱۰۸۹ ۲) ۲۵۸۴ ۳) ۱۱۰۰ ، ۱۹۲۴)

۸ـ محاسبهٔ عدد $\overline{abcd}$ باشرط $\overline{abbc}=\overline{ab}\times\overline{a\cdot b}$

(جواب : ۱۳۳۹ ، ۱۲۲۴ ، ۱۰۰۰ ، ۱۱۱۱)

۶ـ روش استقراء : بسیاری از قضایای مربوط به‌اعداد صحیح رامی‌توان با روشی که به **استقراء ریاضی** مشهور است اثبات نمود و دراغلب موارد تنها روشی است که در دسترس می‌باشد وآن به شرح زیر است :

اگر $f(n)$ تابعی از یك متغیر صحیح n وحکم s مربوط $f(n)$ بازاء $n=a$ محقق باشد وفرض کنیم که ازتحقق حکم s بازاء $n=m$ بتوان‌تحقق آنرا بازاء $n=m+۱$ نتیجه گرفت دراینصورت چون s بازاء $n=a$ برقرار است بازاء جمیع مقادیر $n=a+۱,\ a+۲,\ a+۳,\ldots$ بتوالی نیز برقرار است . یعنی s بازاء $n\geqslant a$ محقق است .

مثال ۱ـ ثابت کنید $f(n)=۲^{۲n}-۳n-۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

چون $f(۱)=۰$ و صفر بر ۹ بخش‌پذیر است پس قضیه بازاء $n=۱$ محقق است و چون :

$$f(n+۱)-f(n)=۲^{۲(n+۱)}-۲^{۲n}-۳=۳(۲^{۲n}-۱)\ .$$
$$=۳(۴^{n}-۱)=۳(۴-۱)(۴^{n-۱}+۴^{n-۲}+\ldots+۱)=۹K\ :$$

ازآنجا اگر $f(n)$ بر۹ بخش‌پذیر باشد دراین $f(n+۱)$ نیز بر۹ بخش‌پذیر است و چون $f(۱)$ نیز بر ۹ بخش پذیر است ، از آنجا نتیجه می‌شود که $f(۲)$، $f(۳)$ ، $f(۴)$ ، ... بتوالی بر۹ بخش‌پذیرندوقضیه بازاء جمیع مقادیر n برقرار است .

مثال ۲ـ اگر n عدد صحیح و مثبت باشد ثابت کنید :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1},$$

با فرض $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}$ ، داریم :

$$u_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1},$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

وهمچنین اگر $v_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{2n-1}$

پس: $v_{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$

$$\therefore \quad v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=u_{n+1}-u_n.$$

و ازآنجا اگر $u_n=v_n$ در این‌صورت $u_{n+1}=v_{n+1}$ وچون حکم بازاء $n=1$ برقراراست، ازآنجا بتوالی بازاء $n=2،3،4،\dots$ نیزبرقراراست.

تمرین

ثابت کنید :

۱ـ $f(n)=7^{2n}-48n-1=$ مضرب ۲۳۰۴;

۲ـ $f(n)=7^{2n}+16n-1=$ مضرب ۶۴;

۳ـ $f(n)=2^{2n+1}-9n^2+3n-2=$ مضرب ۵۴;

۴ـ $f(n)=n^4+6n^3+11n^2+6n=$ مضرب ۲۴;

۵ـ $f(n)=3^{2n+5}+160n^2+56n-243=$ مضرب ۵۱۲;

۶ـ $f(n)=(8n+3)7^{2n}-8\times 3^{2n+2}+40n+69=$ مضرب ۳۰۷۲

۷ـ $f(n)=(16n+1)5^{2n}-17\times 3^{2n+1}-16n+50=$ مضرب ۳۸۴

۸ـ $f(n)=8\times 3^{2n+1}+(40n-49)7^{2n}+25(8n+1)=$

$=$ مضرب ۷۶۸۰۰;

۹ـ ثابت کنید[1] :

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n};$$

و نتیجه بگیرید :

۱) $(n!)^2>n^n;$ ۲) $n^n>1\times3\times5\times\cdots(2n-1);$

۳) $(n!)^3<n^n\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^{2n}$ ، ۴) $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$

۷ـ نمایش اعداد درمبنای g :

لم۱ـ اگر g عددصحیح بزرگتر از ۱ و n عددصحیح ومثبت و :

$$b_ng^n+b_{n-1}g^{n-1}+\cdots+b_1g+b_0=0,$$

که درآن اعداد صحیح $b_i(i=0,\ldots,n)$ طوری باشند که :

$$|b_i|\leqq g-1 \qquad (i=0,\ldots,n)$$

در این صورت $b_i=0$

که از بند ۳ فوراً نتیجه می‌شود .

قضیه‌ـ اگر g عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد هرعدد صحیح و مثبت a را می‌توان به فرم یکتای :

$$a=c_ng^n+c_{n-1}g^{n-1}+\cdots+c_1g+c_0 : \qquad (1)$$

که درآن :

(۲) $1\leqq c_i\leqq g-1$ $(i=1,2,\ldots n-1)$ $0\leqq c_i\leqq g-1$ و $0<c_n\leqq g-1$ بیان نمود.

فرض می‌کنیم a یك عدد صحیح و مثبت مفروض و S مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی k بطوریکه $g^{k+1}>a$ باشد ، چون $g>1$ در این صورت g^{k+1} وقتی k بسمت بی‌نهایت میل می‌کند بی‌نهایت می‌شود . بنابراین S تهی نیست و دارای کوچکترین‌عنصر می‌باشد که آنرا n می‌نامیم پس :

$$g^n\leqq a<g^{n+1} \qquad (3)$$

و عنصر یکتای n تعیین می‌شود باتوجه به قضیهٔ تقسیم داریم :

$$a=c_ng^n+a_1, \qquad (4)$$

۱ـ این قضیه به‌طروق مختلف درکتاب لگاریتم و ریاضیات ثابت شده‌است .

$$\circ \leqq a_{\text{۱}} < g^n \qquad (\text{۵})$$

و از (۳) داریم، $\circ < c_n \leqq g - \text{۱}$ باکاربرد مجددقضیهٔ تقسیم :

$$a_{\text{۱}} = c_{n-\text{۱}} g^{n-\text{۱}} + a_{\text{۲}} \qquad (\text{۶})$$

که‌درآن $\circ \leqq a_{\text{۲}} < g^{n-\text{۱}}$ وباتوجه به‌قضیهٔ (۵) داریم $\circ \leqq c_{n-\text{۱}} \leqq g - \text{۱}$.
بنابراین باتوجه به (۴) ، (۶) داریم :

$$a = c_n g^n + c_{n-\text{۱}} g^{n-\text{۱}} + a_{\text{۲}};$$

با ادامهٔ عمل‌بطریق مشابه نتیجه می گیریم‌که اعدادصحیح $c_i (i = \circ, \ldots, n)$ بطوریکه (۱) و (۲) را برقرار نمایند وجود دارند .

برای اثبات اینکه فرم (۱) یکتاست . فرم دیگری برای a درنظر می گیریم مثلاً :

$$a = d_m g^m + d_{m-\text{۱}} g^{m-\text{۱}} + \ldots + d_{\text{۱}} g + d_{\circ} \qquad (\text{۷})$$

بطوریکه

$\circ < d_m \leqq g - \text{۱}$ و $(i = \circ, \text{۱}, \ldots, m - \text{۱})$ $\circ \leqq d_i \leqq g - \text{۱}$

ابتدا فرض می کنیم $n > m$ باشد . از (۱) و (۷) داریم :

$$\circ = (c_{\circ} - d_{\circ}) + (c_{\text{۱}} - d_{\text{۱}}) g + \ldots + (c_n - d_n) g^m +$$
$$c_{m+\text{۱}} g^{m+\text{۱}} + c_n g^n \qquad (\text{۸})$$

همچنین باتوجه به(۲) و(۸) داریم : $(i = \circ, \ldots, m)$ $|c_i - d_i| \leqq g - \text{۱}$
و با کاربرد لم نتیجه می گیریم که ضریب برابر صفر است بخصوص $c_n = \circ$
اما چون $c_n \neq \circ$ در نتیجه $n > m$.

بطریق مشابه ثابت می‌شود که m بزرگتر از n نیست . و در نتیجه $m = n$ و درنتیجه (۸) بصورت :

$$\circ = (c_{\circ} - d_{\circ}) + (c_{\text{۱}} - d_{\text{۱}}) g + \ldots + (c_n - d_n) g^n .$$

درمی‌آید . باتوجه به لم نتیجه می‌شودکه $c_i = d_i (i = \circ, \ldots, n)$

عبارت(۱) تحت شرایط (۲) را نمایش عدد a درمبنای g وعددصحیح g را مبنا و یا پایه می‌نامند . اگر a دارای نمایش (۱) درمبنای g باشد ، می‌نویسیم $a = (\overline{c_n c_{n-\text{۱}} \cdots c_{\circ}})_g$ و اگر اشتباهی‌نشود بطور اختصاربصورت $\overline{c_n c_{n-\text{۱}} \cdots c_{\circ}}$ نمایش می‌دهیم . برای مثال چون :

$$۳۷۵=۲^۸+۰\times۲^۷+۲^۶+۲^۵+۲^۴+۰\times۲^۳+۲^۲+۲+۱$$
$$۳۷۵=(۱۰۱۱۱۰۱۱۱)_۲.$$

عده ارقامی که در عددنویسی در مبنای شمارش g بکار می‌رود برابر g خواهد بودکه عبارتند از :

$$۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,\ \alpha=۱۰;\ \beta=۱۱;\ \gamma=۱۲;\ldots\lambda=g-۳$$

$\mu=g-۲$، $\upsilon=g-۱$. معمولاً اگر پایهٔ g زوج باشد $\frac{g}{۲}$ را بـه δ و $\frac{g-۲}{۲}$ را به ε نمایش می‌دهند و اگر g فرد باشد $\frac{g+۱}{۲}$را به ω و $\frac{g-۱}{۲}$ را به ρ و $\frac{g-۳}{۲}$ را به Π نمایش میدهند .

مثال۱ـ $(۱۱۰۱۰۱۰۰۱۱)_۲$را درمبنای‌اعشاری (مبنای ده) بنویسید.
(جواب ۸۵۱)

مثال ۲ـ اگر $(۳۲۱)_g=۱۶۲$ باشد مطلوبست تعیین g .
در این حال داریم :

$$۳g^۲+۲g+۱=۱۶۲$$
$$۳g^۲+۲g-۱۶۱=۰\Longrightarrow g=۷;$$

مثال ۳ـ اتحادهای زیر را درنظر می گیریم :

$$(۱+a+a^۲+\ldots+a^n)(۱+a^{n+۱})=$$
$$=۱+a+\cdots+a^n+a^{n+۱}+\ldots+a^{۲n+۱};$$
$$(۱+a)(۱+a^۲+a^۴)=۱+a+a^۲+a^۳+a^۴+a^۵،$$

اگر a را به ۱۰ بدل کنیم و سپس n را مساوی ۱ و ۲ قرار دهیم داریم :

$$۱۱\times۱۰۱=۱۱۱۱;$$
$$۱۱۱\times۱۰۰۱=۱۱۱۱۱۱;$$

وهمچنین
$$۱۱\times۱۰۱۰۱=۱۱۱۱۱۱;$$

مثال ۴ـ باضرب $۱+a+a^۲+a^۳+a^۴+a^۵$ در $۱+a^۶+a^{۱۲}+a^{۱۸}+a^{۲۴}+a^{۳۰}+a^{۳۶}+a^{۴۲}$ خواهیم داشت : $۱+a+a^۲+\ldots+a^{۴۷}$ که بازاء، $a=۱۰$ عددی حاصل می‌شود که دارای

۴۸ رقم ۱ می‌باشد که مساویست با حاصلضرب :

$$۱۱۱۱۱۱ \times ۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰ \ldots\ldots ۱۰۰۰۰۱;$$

مثال ۵ـ باقراردادن $a=۱۰$ در اتحاد :

$$(۱+a)(۱+a^{۲})(۱+a^{۴})\ldots(۱+a^{۲^{n}})=$$
$$=۱+a+a^{۲}+\ldots+a^{۲^{n+۱}}-۱;$$

و برای مثال اتحاد :

$$(۱+a)(۱+a^{۲})(۱+a^{۴})=۱+a+a^{۲}+a^{۳}+a^{۴}+a^{۵}+a^{۶}+a^{۷}$$

داریم :

$$۱۱\times ۱۰۱\times ۱۰۰۰۱=۱۱۱۱۱۱۱;$$

وچون $۱۲۳۴۵۶۷۹\times ۹=۱۱۱۱۱۱۱۱۱,$

باضرب داریم $۱۲۳۴۵۶۷۹۰۱۲۳۴۵۶۷۹۰۱۲۳۴۵۶۷۹\times ۹=$

$$=۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

مثال ۶ـ ثابت‌کنید مربع عدد rrrr درمبنای s بصورت $rrrq۰۰۰۱$ که درآن q , r , s سه عدد متوالی می‌باشند بیان می‌گردد . $(q<r)$

باید ثابت‌کنیم $(rrrr)^{۲}_{s}=rrrq۰۰۰۱$

برای این منظور می‌نویسیم :

$$rrrr=rrrr+۱-۱=۱۰^{۴}-۱$$

چون یك باضافهٔ r مساوی s مبنا و برابر ۱۰ می‌باشد ، پس :

$$(rrrr)^{۲}=(۱۰^{۴}-۱)^{۲}=۱۰^{۸}+۱-۲\times ۱۰^{۴}=$$
$$۱۰۰۰۰۰۰۰۱-۲۰۰۰۰=rrrq۰۰۰۱;$$

مثال ۷ ـ از تساوی $۳۶+۴۵=۱۰۳$ حاصلضرب ۳۶×۴۵ را حساب‌کنید .

ازتساوی مبنا ۸ بدست می‌آید وازآنجا حاصلضرب مساویست‌با۲۱۲۶

مثال ۸ـ عدد$(\overline{aabb})_{g}$ را طوری تعیین کنیدکه مربع کامل باشد .

(نقل ازکتاب نظریهٔ اعداد تألیف دکترهشترودی)

این عدد پس از تجزیه بصورت $(g+۱)(b+ag^{۲})$ درمی‌آید وطرف

راست مربع یك عدد دورقمی درمبنای g می‌باشد وچون بر $g+۱$ بخش‌پذیر است پس معلوم می‌شود که این دورقم مساوی می‌باشند درنتیجه :

$$(g+۱)(b+ag^۲)=(cc)^۲_g=c^۲(g+۱)^۲$$
$$b+ag^۲=c^۲(g+۱)،$$

طرف راست عبارت فوق بر $g+۱$ بخش پذیر است پس طرف چپ باید بـر $g+۱$ بخش پذیر یعنی باید $a+b=g+۱$ و ازآنجا، $b=g+۱-a$ و با قراردادن در معادلهٔ فوق :

$$g+۱-a+ag^۲=c^۲(g+۱)$$
$$۱+a(g-۱)=c^۲$$

یا
$$a(g-۱)=(c-۱)(c+۱)$$

پس $c=g-۲=\mu$ و $a=c-۱$ $(g\geqslant۳)$

وازآنجا $b=۴$، $a=\lambda$ بنابراین‌مسئله دارای جواب $(\overline{\mu\mu})^۲_g=(\overline{\lambda\lambda۴۴})_g$ درتمام پایه‌هامی‌باشد . ولی مسئله درهرپایه دیگردارای جوابهای‌دیگری‌نیز می‌باشد .

بازاء $g=۳$ یك $(۲۰)^۲_۳=(۱۱۰۰)_۳$ وبازاء $g=۴$ جواب نداریم.

مسئله بازاء $g=۵،۶،۱۰،۱۲،۱۴$ فقط جواب عمومی فوق را دارد .

بازاء $g=۷،۱۳،۱۵$ مسئله دارای سه جواب است .

بازاء $g=۸$ چهارجواب وبازاء $g=۹،۱۱$ مسأله دوجواب دارد که به سهولت قابل محاسبه می‌باشد .

مثال۸ــ مطلوبست محاسبهٔ عددی $(\overline{abab})_g$ باشرط :

$$(\overline{abab})_g=k(\overline{ab})^۲_g \, .$$

(نقل ازکتاب نظریهٔ اعداد تألیف دکتر هشترودی)

این مسأله بازاء $g=۲،۴،۶،۱۰،۱۴$ جواب ندارد.واگرپایهٔ g عدد فرد باشد مسأله دارای جواب عمومی زیر می‌باشد :

$$(\overline{\rho\omega\rho\omega})_g=۲(\overline{\rho\omega})^۲_g \, .$$

بازاء $g=۳$ جواب $(۱۲۱۲)_۳=۲(۱۲)_۳^۲$ بدست می‌آید .

« $g=۵$ « $(۲۳۲۳)_۵=۲(۲۳)_۵^۲$ « «

« $g=۷$ جوابهای $(۳۴۳۴)_۷=۲(۳۴)_۷^۲$ و $(۱۳۱۳)_۷=۵(۱۳)_۷^۲$ بدست‌می‌آید.

بازاء $g=۸$ جواب $(۱۵۱۵)_۸=۵(۱۵)_۸^۲$ بدست می‌آید .

« $g=۹$ « $(۴۵۴۵)_۹=۲(۴۵)_۹^۲$ « «

« $g=۱۱$ « $(۵۶۵۶)_{۱۱}=۲(۵۶)_{۱۱}^۲$ « «

« $g=۱۲$ « $(۲۵۲۵)_{۱۲}=۲(۲۵)_{۱۲}^۲$ « «

« $g=۱۳$ « جوابهای $(۱۴۱۴)_{۱۳}=۱۰(۱۴)_{۱۳}^۲$ و

$(۲۸۲۸)_{۱۳}=۵(۲۸)_{۱۳}^۲$ و $(۶۷۶۷)_{۱۳}=۲(۶۷)_{۱۳}^۲$ بدست می‌آید .

بازاء $g=۱۵$ جواب $(۷۸۷۸)_{۱۵}=۲(۷۸)_{۱۵}^۲$ بدست می‌آید .

تمرین

۱ـ عددی درمبنای۱۲ بصورت $\overline{abc}$ و در مبنای مجهول x بصورت $\overline{abc۰}$ نوشته شده است . ارقام a ، b ، c و مبنای مجهول را بدست‌آورید.
(جواب: $c=۳$ و $a=b=۲$ و $x=۵$)

۲ـ عدد $(\overline{abab})$ درپایه ۷ بصورت مربع کامل است ارقام a و b را تعیین کنید .
[جواب: $(۴۴۴۴)_۷=(۵۵)_۷^۲$ و $(۲۴۲۴)_۷=(۴۲)_۷^۲$ و $(۱۱۱۱)_۷=(۲۶)_۷^۲$]

۳ـ ثابت‌کنیدکه $(۱۰۰۱۰۰۱۰۰۱۰۰۱)_N$ بر $(۱۱۱۱۱)_N$ بخش‌پذیر است .

۴ـ اگر $(۱۷۱)_x$ مجذور کامل باشد x راحساب کنید .جواب: $x=۸$

۵ـ کسر $\frac{۱۳}{۱۶}$ را درمبنای ۶ بنویسید .

(جواب: $\frac{۱۳}{۱۶}=\frac{۴}{۶}+\frac{۵}{۶^۲}+\frac{۱}{۶^۳}+\frac{۳}{۶^۴}=۰/۴۵۱۳$)

۶ـ مطلوبست محاسبهٔ ارقام a و b با شرط : $\overline{(abab)_{\overline{ab}}}=۲۰۳۰$

(جواب: $\overline{ab}=۱۲$)

۷ـ درمبنای a چند عدد n رقمی وجود دارد ؟

۸ـ مطلوبست محاسبهٔ ارقام a ، b ، c درمعادلهٔ :

$$(\overline{ab})_N \times (\overline{ba})_N = (\overline{cdc})_N$$

۹ـ اگر عددی ۲ ـ g رقمی در پایهٔ g از جمیع ارقام بامعنی (بدون رقم صفر) ـ جزرقم ماقبل ۲ ـ $g = \mu$ متوالی هم تشکیل شده باشد حاصل‌ضرب این عدد در رقم ۱ ـ $g = v$ در پایهٔ g عددیست ۱ ـ g رقمی که جمیع ارقام آن برابر واحد می‌باشد .

۱۰ـ مطلوبست تعیین عددی که چون آنرا در بزرگترین رقم عددنویسی ضرب کنیم عدد مقلوب شود . [جواب: $(۱۰\mu v)_g \times (v)_g = (v\mu ۰۱)_g$]

۸ـ کوچکترین مضرب مشترک ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک

اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ اعداد مفروض غیرصفر باشند هرعدد صحیحی که بر هریك از اعداد $a_۱, a_۲, a_۳ \dots, a_n$ بخش پذیر باشد **مضرب مشترك** اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ نامیده می‌شود .

مجموعهٔ مثبت مضارب مشترك اعداد $a_۱a_۲\dots a_n$ غیرتهی است . چون برای مثال $|a_۱a_۲\dots a_n|$ متعلق باین مجموعه است . کوچکترین عضو این مجموعه را **کوچکترین مضرب مشترك** $(l.c.m)$ اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ نامیده و به $\{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ نمایش می‌دهیم .

برای مثال $۶۰ = \{۴, ۶, ۲۰\}$

قضیهٔ ۱ـ اگر $m = \{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ در اینصورت عدد صحیح l فقط و فقط درصورتی مضرب مشترك اعداد $a_۱, a_۲ \dots, a_n$ است که $m|l$.

اگر $m|l$ در این‌صورت باتوجه به تعریف m ، l بر هریك از اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ بخش‌پذیراست وازآنجا‌مضرب مشترك‌اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ می‌باشد .

حال فرض می‌کنیم که l مضرب مشترك اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ باشد باتوجه به قضیهٔ تقسیم داریم : $l = mq + r$, که در آن $۰ \leqq r < m$, عدد صحیح r مضرب مشترك $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ می‌باشد چون $r = l - mq$ و l و m هردو مضرب مشترك $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ می‌باشد از این تعریف و باتوجه به نامساوی $r < m$ نتیجه می‌شود که $r = ۰$ و درنتیجه $m|l$.

هرعددصحیحی که هریك‌ازاعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ راعادکند **مقسوم‌علیه مشترك** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ، نامیده می‌شود . n عدد مفروض $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دارای تعداد محدودی مقسوم‌علیه مشترك می‌باشد که عدد ۱ هم جزء آنهاست. بزرگترین این مقسوم علیه‌هارا **بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك** (g.c.d) اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نامیده و به $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ نمایش می‌دهند .

برای مثال $۲ = (۴, ۶, ۲۰)$

قضیهٔ ۲ ـ اگر $d = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ در اینصورت اعداد صحیح $x_1, x_2, \ldots, x_n$ طوری وجود دارند که :

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی باشد که بفرم :

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ نوشته می‌شود که در آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد صحیح‌دلخواه‌می‌باشند . درمجموعهٔ S اعداد مثبتی وجوددارد مثلا شامل $|a_1|$ است که متناظربا $x_1 = \operatorname{sgn} a_1$ و $x_2 = x_3 \ldots = x_n = ۰$ می‌باشد بنابراین S دارای‌کوچکترین عنصری می‌باشدکه‌آنرا d_0 می‌نامیم .

اکنون ثابت می‌کنیم‌که هرعنصر S بر d_0 بخش‌پذیر است :

باتوجه به قضیهٔ تقسیم اگر m عنصری از S باشد داریم :

$$m = d_0q + r, \qquad (۱)$$

$$0 \leqq r < d_0, \qquad (۲)$$

از(۱) داریم $r = m - d_0q$ وچون $d_0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ و $m = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$ که در آن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $y_1, y_2, \ldots, y_n$ اعداد صحیحی می‌باشند درنتیجه :

$$r = a_1(y_1 - qx_1) + a_2(y_2 - qx_2) + \ldots + a_n(y_n - qx_n),$$

و از آنجا r متعلق به S می‌باشد بنابراین باتوجه به تعریف d_0 و نامساوی (۲) داریم $r = ۰$ و درنتیجه اگر m عنصری از S باشد داریم :

$$d_0 | m \qquad (۳)$$

هریك از اعداد صحیح $a_i (i = ۱, ۲, \ldots, n)$ متعلق به S می‌باشند و a_i عدد

صحیحی می‌باشد که از $x_i=1$ و $x_j=0$ $(j\neq i)$ بدست می‌آید . بنابراین از (۳) نتیجه می‌شود که d_0 یك مقسوم علیه مثبت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ می‌باشد و از آنجا بنا به تعریف d داریم $d_0\leqq d$, اما $d|a_i(i=1,2,\ldots,n)$ و

$$d_0=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n.$$

لذا $d|d_0$ بنابراین $d\leqq d_0$ و ازآنجا $d=d_0$

قضیهٔ ۳ـ اگر $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ دراینصورت عدد صحیح d_1 فقط و فقط در صورتی یك مقسوم علیه مشترك اعداد $a_1,a_2,\ldots,a_n$ می‌باشد که $d_1|d$.

اگر $d_1|d$, بنابراین چون d مقسوم‌علیه مشترك $a_1,a_2,\ldots,a_n$ است نتیجه می‌شود که $d_1|a_i(i=1,2,\ldots,n)$ بنابراین d_1 یك‌مقسوم‌علیه مشترك اعداد $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ می‌باشد .

برعکس فرض می‌کنیم d_1 مقسوم علیه مشترك اعداد $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ باشد با توجه به‌قضیهٔ ۲ اعداد صحیح $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ طوری وجود دارند که $d=a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots a_nx_n$ و ازآنجا $d_1|d$.

قضیهٔ ۴ـ اگر $a_1, a_2,\ldots\ldots, a_n$ اعداد غیرصفر و $d_1=a_1,$

$$d_2=(d_1,a_2)\text{ و }d_3=(d_2,a_3),\cdots\cdots d_n=(d_{n-1},a_n).$$

باشد در این‌صورت $d_n=(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n)$

روش‌استقراء رابکارمی‌بریم. بازاء $n=2$ قضیه برقراراست . فرض‌می‌کنیم $d_r=(a_1,a_2\ldots\ldots,a_r)$ و $e_{r+1}=(a_1,a_2\ldots\ldots,a_{r+1})$ چون e_{r+1} اعداد $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{r+1}$ را عاد می‌کند اعداد $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_r$ را عاد خواهد نمود ازآنجا باتوجه به قضیهٔ ۳ ؛ $e_{r+1}|d_r$ وبنابراین $e_{r+1}|(d_r,a_{r+1})$ یعنی: $e_{r+1}|d_{r+1}$.

همچنین $d_{r+1}|d_r$ و $d_{r+1}|a_{r+1}$ و از آنجا با توجه به قضیهٔ ۳ ؛ $d_{r+1}|a_i(i=1,2,\ldots,r+1)$ در نتیجه $d_{r+1}|e_{r+1}$ و از آنجا

$$d_{r+1}=(a_1,a_2,\cdots a_{r+1})$$

۹ـ الگوریتم اقلیدسی(تقسیم نردبانی) برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b .

چون اعداد یکتای (q_1,r_1)، (q_2,r_2) ، ... را بتوالی طوری می‌توان پیدا کرد که :

$$a=bq_1+r_1,\quad b=r_1q_2+r_2,\quad r_1=r_2q_3+r_3,\quad \cdots \qquad (A)$$

که در آن $\qquad b>r_1>r_2>r_3\cdots\geqslant 0$

بنابراین تعداد اعداد مثبت وصحیح کمتر از b محدود است باقیمانده صفر بایستی موجود باشد ، فرض می‌کنیم $r_{n+1}=0$ عمل با :

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n \text{ و } r_{n-1}=r_nq_{n+1}$$

خاتمه پیدا کند و از آنجا زوج اعداد زیردارای یك مقسوم‌علیه مشترك می‌باشند

$$(a,b) \text{ و } (b,r_1) \text{ و } (r_1,r_2) \text{ و } \cdots(r_{n-1},r_n)$$

وچون $r_{n-1}=r_nr_{n+1}$ مقسوم‌علیه‌های مشترك r_{n-1} و r_n همان مقسوم‌علیه‌های مشترك r_n می‌باشد بنابراین d وجود داشته ومقدارش r_n است و این طریقه پیداکردن نردبانی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد ، یا دوعبارت است چون d برهر مقسوم‌علیه مقسوم مشترك a،b بخش‌پذیر است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a،b می‌باشد .

توجه ـ اگر a،b هردو درعدد m ضرب شوند (یا تقسیم شوند) d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آنها در m ضرب و یا تقسیم می‌شود .

مثال ۱ـ ثابت کنید $۳۷=(۱۱۴۷,۸۵۱)$ داریم :

$$۱۱۴۷=۱\times ۸۵۱+۲۹۶;$$
$$۸۵۱=۲\times ۲۹۶+۲۵۹;$$
$$۲۹۶=۱\times ۲۵۹+۳۷;$$
$$۲۵۹=۷\times ۳۷;$$

مثال ۲ـ اگر a،b،k اعداد صحیح باشند ، ثابت کنید :

$$(a+kb,b)=(a,b),$$

فرض کنیم $d=(a,b)$ و $d_1=(a+kb,b)$ پس $d|a$ و $d|b$ ودرنتیجه $d|a+kb$ و $d|b$ و از آنجا $d|d_1$.

همچنین $d_1|(a+kb)$ و $d_1|b$ بنابراین $d_1|(a+kb-kb)$, یعنی $d_1|a$ و $d_1|b$ ازآنجا $d_1|d$ و درنتیجه $d_1=d$.

مثال ۳ـ مطلوبست (g.c.b) دوعبارت :

$$x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1 \text{ و } x^4-2x^3-x^2-2x+1$$

از راه تقسیمات متوالی x^2+x+1 بدست میآید .

۱۰ـ اعداد اول

تعریف ۱ـ دو عدد a ، b را **نسبت بهم اول** گویند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان یك باشد و اغلب می‌گویند که a و b یا b و a نسبت بهم اولند .

قضیهٔ ۱ ـ اگر حاصل‌ضرب ab به‌عدد m بخش‌پذیر باشد و m نسبت به a اول باشد m یکی از مقسوم علیه‌های b است .

زیرا ـ اگر a نسبت به m اول باشد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و m مساوی یك و ازآنجا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ab و mb مساوی b است و از طرفی بنا به فرض m مقسوم علیه ab و بنابراین مقسوم مشترك ab و mb می‌باشد و ازآنجا m مقسوم‌علیه b و یا مساوی با آن می‌باشد .

قضیهٔ ۲ ـ اگر a نسبت به b اول باشد و هریك از این اعداد مقسوم‌علیه عدد N باشند بنابراین ab یك مقسوم‌علیه از N است .

فرض‌کنیم $N=aq$, پس b یك مقسوم‌علیه از aq می‌باشد و چون b نسبت به a اول است پس بایستی مقسوم علیه q باشد . فرض‌کنیم $q=mb$, پس $N=mab$, و ab مقسوم‌علیه N است .

قضیهٔ ۳ـ اگر a نسبت به b اول باشد اعداد صحیح ومثبت x ، y را می‌توان طوری پیداکردکه : $ax-by=\pm 1$.

از معادلهٔ (A) بند ۹ نتیجه می‌شود که

$$r_1=a-bq_1 \text{ و } r_2=-aq_2+b(1+q_1q_2) \text{ و}$$

$$r_3=a(1+q_2q_3)-b(q_1+q_3+q_1q_2q_3)$$

با ادامهٔ عمل‌ملاحظه می‌شود که هرباقیمانده رامی‌توان به‌فرم $\pm(ax-by)$

که درآن x ، y صحیح و مثبت می‌باشند بیان نمود اگر a نسبت به b اول باشد آخرین باقیمانده مساوی یك است .

تعریف ۲ـ عددی که جز عدد یك وخودش مقسوم‌علیه دیگری نداشته باشد **عدد اول** و باختصار **اول** نامیده می‌شود .

عددی که اول نباشد **مرکب** گفته می‌شود .

قضیهٔ ۴ـ یك عدد اول p نسبت به هر عددی که مضربی از p نباشد اول است .

چون اگر a یك چنین عددی باشد q و r را می‌توان طوری پیداکرد که $a=pq+r$ که در آن $p>r>0$ و چون p و ۱ تنها مقسوم علیه p می‌باشند و همچنین $r<p$ تنها مقسوم علیه مشترك p و r عدد یك می‌باشد یعنی p و r نسبت به هم و نسبت به a اولند .

قضیهٔ ۵ ـ اگر عدد اول p مقسوم علیه حاصلضرب $abc\ldots k$ باشد باشد حداقل یکی از مقسوم‌علیه‌های یکی از فاکتور a،b،$c\ldots k$ می‌باشد .

۱۱ـ قضایای روی اعداد ، اول و مرکب .

قضیهٔ ۱ـ هرعدد مرکب N اقلا شامل یك مقسوم‌علیه اول‌می‌باشد .

چون اگر N اول نباشد دارای مقسوم علیه n غیر از N و یك می‌باشد **که از هرمقسوم علیه دیگر بزرگتر نیست** بعلاوه این مقسوم علیه بایستی اول باشد چون بعبارت دیگر عدد باید یك مقسوم‌علیه وکوچکتر از N و بزرگتر از ۱ داشته باشد واین حرف یك مقسوم‌علیه N خواهد بود ونتیجه می‌شودکه هرعدد مرکب را می‌توان بحاصلضرب اعداد اول تجزیه کرد .

بنابراین اگر Nحداقل دارای یك‌فاکتور اول p باشد داریم$N=pa$ که درآن $N>p>1$ می‌باشد و اگر a اول‌نباشد حداقل دارای یك‌فاکتور اول q و $a=bq$ باشرط $a>b>1$ می‌باشد ؛

پس
$$N=ap=abpq,\ldots$$

اما تعداد اعداد کمتر از N محدود می‌باشد و $N>a>b>\ldots$ بنابراین مجموعهٔ اعداد N ، a ، b ، ... بالاخره باید به‌عدداول ختم شوند وازآنجا N را می‌توان بفرم $N=qpr\ldots u$ که درآن r،q،p،$\ldots u$ همگی‌اول می‌باشند ولزومی ندارد همگی مختلف باشند نوشت .

یعنی می‌توان گفت هر عدد مرکب را می‌توان بفرم زیر بیان نمود :

$$N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots u^s,$$

که در آن p، q، r... u همگی اعداد اول مختلف می‌باشند .

قضیهٔ ۲ ـ هر عدد مرکب را فقط بیك صورت بحاصل‌ضرب عوامل اول می‌توان تجزیه‌کرد.

زیرا اگرفرض‌کنیم $N = p^a q^b r^c \ldots = P^A Q^B R^C \ldots$ که در آن p, q، r... و P، Q، R،... اول می‌باشند چون عدد اول P یك مقسوم علیه حاصل‌ضرب $p^a q^b r^c \ldots$ می‌باشند پس آن یك مقسوم‌علیه یکی از فاکتورهای p، q، r... و درنتیجه مساوی یکی ازآنها میباشد بنابراین هریك ازمجموعه اعداد P، Q، R مساوی یکی از اعداد p، q، r... می‌باشد و نمی‌تواندفاکتور اولی در یك طرف تجزیه N موجود باشدکه در دیگری نیست . پس :

$$N = p^a q^b r^c \ldots = p^A q^B r^C \ldots$$

اگر $a \neq A$ باشد یکی از آنها بایستی بزرگتر باشد مثلاً $A > a$ در این حال فرض میکنیم $A = a + e$ پس $q^b \cdot r^c \ldots t^m = p^e \cdot q^B \cdot r^C \ldots t^M$ و این غیرممکن است زیرا طرف چپ اول با p و طرف راست مضربی از p می‌باشد بنابراین A بایستی مساوی a باشد و بطریق مشابه $b = B$،... $m = M$... و دو عبارت N متحداند ·

که در نظریه اعدادبسیاری مهم می‌باشد و ازآن قضایای زیر فوراً نتیجه می‌شود :

قضیهٔ ۳ ـ اگر m نسبت به هر یك از اعداد a، b، c،... k اول باشدنسبت به‌حاصل‌ضرب $abc \ldots k$ نیز اول است .

نتیجهٔ ـ اگر a با b اول باشد a^n با b^n نیزاول‌است (n عددیست صحیح) و برعکس .

قضیهٔ ۴ ـ عدد N در صورتی اول است‌که براعداد اول بزرگتر از ۱ وکمتر و یا مساوی با $\sqrt{N}$ بخش‌پذیر نباشد زیرا با فرض $N = ab$ که در آن $a \leqslant b$ نتیجه‌می‌شود $N \geqslant a^2$ یعنی $a \leqslant \sqrt{N}$

قضیهٔ ۵ ـ رشتهٔ اعداد اول نامتناهی است .

زیرا اگر فرض کنیم p بزرگترین عدد اول باشد بنابراین حاصل‌ضرب:

$$f(p)=۲.۳.۵.۷.۱۱...p;$$

که در آن هرفاکتور اول است بر هر یك از اعداد ۲،۳،۵،...p بخش‌پذیر است . پس عدد $f(p)+۱$ بر هیچیك از این فاکتورها بخش‌پذیر نبوده و خودیك عدد اول است و یا بر عدد اولی بزرگتر از عدد p بخش‌پذیر می‌باشد یعنی p بزرگترین عدد اول نمی‌باشد و تعداد اعداد اول محدود نیست .

تمام اعداد اول کوچکتر از N را می‌توان از غربال اراتستن[۱] بدست آورد . عمل تشکیل می‌شود از نوشتن تمام اعداد از یك تا $N-۱$ و کنار گذاشتن تمام مضارب اعداد اول ۲،۳،۵،۷... که کمتر از $\sqrt{N}$ می‌باشند و تقسیم عدد براین اعداد با وجود این مسأله تشخیص اینکه یك عدد بزرگ اول است یا مرکب خالی از اشکال نیست .

مثال ـ کوچکترین مضرب مشترك سه عدد a،b،c برابر ۱۷۸۵ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو بدوی آنها برابر ۱۷ است بفرض : $a+b+c=۲۵۵$ مطلوبست محاسبه این سه عدد .

طبق‌فرض داریم $a=۱۷a'$ ، $b=۱۷b'$, $c=۱۷c'$ پس کوچکتر مضرب مشترك آنها $۱۷a'b'c'=۱۷۸۵$ و یا $a'b'c'=۱۰۵$ و $a'+b'+c'=۱۵$ می‌باشد پس $a'.b'.c'=۷\times۵\times۳$ و از آنجا $a'=۷$ و $b'=۵$ و $c'=۳$ و $a=۱۱۹$ ، $b=۸۵$ ، $c=۵۱$

قضیهٔ ۶ ـ فرمول جبری صحیح و منطقی که بتواند اول را نمایش دهد موجود نیست .

زیرا اگر فرض کنیم فرمول $a\pm bx\pm cx^۲\pm dx^۳\pm...$ نمایش اعداد اول فقط باشد و مقدار آن بازاء $x=m$ برابر p باشد داریم

$$p=a\pm bm\pm cm^۲\pm dm^۳+...;$$

۱ـ اراتستن فیلسوف ریاضی‌دان قدیمی یونانی (۲۸۴ ق. م)

بازاء $x=m+np$ مقدار این عبارت می‌شود :

$$a\pm b(m+np)\pm c(m+np)^{۲}\pm d(m+np)^{۳}+\cdots$$

یعنی $a\pm bm\pm cm^{۲}\pm dm^{۳}\pm\cdots\pm p$ مضربی از

یا $p+p$ مضربی از

معذلك فرمول‌های زیر جالب می‌باشند .

A ـ $x^{۲}+x+۴۱$ بازاء $x<۴۰$ عدد اول است (اولر)

B ـ $x^{۲}+x+۱۷$ « $x<۱۶$ « « (بارلو)

C ـ $۲x^{۲}+۲۹$ « $x<۲۹$ « « «

D ـ $x^{۲}-۷۹x+۱۶۰۱$ بازاء $x<۷۹$ عدد اول است (بارلو)

۱۲ـ مقسوم‌علیه‌های یك عدد N .

فرض‌کنیم $N=p^{a}\cdot q^{b}\cdot r^{c}\ldots$ که درآن p، q، r ... اعداد اول می‌باشند چنانچه n تعدادمقسوم‌علیه‌ها و s مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد N بانضمام ۱ و N باشد داریم :

قضیهٔ ۱ـ $n=(a+۱)(b+۱)(c+۱)\ \ldots$

$$s=\frac{p^{a+۱}-۱}{p-۱}\cdot\frac{q^{b+۱}-۱}{q-۱}\cdot\frac{r^{c+۱}-۱}{r-۱}\cdots$$

چون مقسوم‌علیه‌های عدد N جملاتی ازبسط :

$$(۱+p+p^{۲}+\cdots+p^{a})(۱+q+q^{۲}+\cdots+q^{b})\times$$
$$\times(۱+r+r^{۲}+r\cdots+r^{c})\cdots$$

می‌باشند تعدادجملات پرانتز اول $a+۱$ ، دومی $b+۱$ وسومی $c+۱$ ، ... و ازآنجا n مساوی حاصل‌ضرب آنها و S را می‌توان بسهولت محاسبه کرد .

مثال ـ مطلوبست محاسبهٔ تعداد و مجموع مقسوم‌علیه ۲۱۶۰۰

$$۲۱۶۰۰=۶^{۳}\times۱۰^{۲}=۲^{۳}\times۳^{۳}\times۲^{۲}\times۵^{۲}=۲^{۵}\times۳^{۳}\times۵^{۲}$$

$$n=(۵+۱)(۳+۱)(۲+۱)=۷۲$$

$$s = \frac{۲^۶-۱}{۲-۱} \times \frac{۳^۴-۱}{۳-۱} \times \frac{۵^۳-۱}{۵-۱} = ۶۳ \times ۴۰ \times ۳۱ = ۷۸۱۲۰$$

قضیهٔ ۲ ـ تعداد طرقی که می‌توان عدد N را به حاصل ضرب دو فاکتور بانضمام ۱ و N نوشت مساوی $\frac{۱}{۲}(n+۱)$ ویا $\frac{۱}{۲}n$ است برحسب اینکه N مربع کامل باشد یا نباشد.

چون اگر N مربع کامل باشد هریك از اعداد a، b ، c ... زوج و بنابراین n فرد است . اما اگر n مربع کامل نباشد حداقل یکی از اعداد a،b،c.... فرد است و بنابراین n زوج می‌باشد . بعلاوه اگر

$$d_n(=N) \text{ ، } d_{n-۱} \text{ ، } d_{n-۲} \text{ ، } d_۳ \text{ ، } d_۲ \text{ ، } d_۱(=۱)$$

مقسوم‌علیه‌های عدد N باشد تعداد طروقی که عدد N را می‌توان بحاصل‌ضرب دوعامل نوشت عبارتست از :

$$d_۱d_n,\ d_۲d_{n-۱},\ d_۳d_{n-۲},\ \dots\ d_xd_x, \text{ اگر } n=۲x-۱,$$

$$d_۱d_n,\ d_۲d_{n-۱},\ d_۳d_{n-۲},\ \dots\ d_yd_{y+۱}, \text{ اگر } n=۲y,$$

و از آنجا تعداد طروق x ، یا y است که به ترتیب مساوی $\frac{۱}{۲}(n+۱)$ و یا $\frac{۱}{۲}n$ می‌باشد برحسب‌اینکه N بصورت $k^۲$ ویا مخالف آن باشد .

مثال ـ عددی پیدا کنید که اولاً تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌فرد وثانیاً در تقسیم آن بر ۳۹ خارج قسمت عدد اول و باقیمانده مساوی واحد باشد .

بطوریکه گفته‌شدفردبودن تعداد مقسوم‌علیه‌ها یعنی مربع کامل بودن‌عدد پس $N=m^۲$ و از آنجا :

$$m^۲=۳۹\times q+۱,$$

$$m^۲-۱=۳۹\times q;$$

$$(m-۱)(m+۱)=۳\times ۱۳\times q$$

چنانچه طرق مختلف تجزیه عبارت فوق را بنویسیم دوتای قابل قبول آنها عبارتند از :

$$m-۱=q; \qquad m+۱=۳۹ \Rightarrow m=۳۸$$
$$m-۱=۳۹; \qquad m+۱=q \Rightarrow m=۴۰$$
$$N_۱=۳۸^۲ \qquad N_۲=۴۰^۲$$

قضیهٔ ۳ـ تعداد طروقی‌که عدد N را می‌توان بحاصل ضرب دوعامل اول نسبت بهم تجزیه نمودمساویست با $۲^{m-۱}$ که درآن m تعدادعامل‌های‌اول مختلف موجود در N می‌باشد.

چون چنین‌فاکتورهائی‌جملاتی از بسط

$$(۱+p^a)(۱+q^b)(۱+r^c)\ldots$$

می‌باشد وتعداد آنها ۲^m و تعداد زوجها $۲^{m-۱}$ می‌باشد .

مثال ۱ـ مطلوبست تعیین n و s و m در عدد $N=۵۴۰$

$$N=۲^۲\times۳^۳\times۵; \qquad n=(۲+۱)(۳+۱)(۱+۱)=۲۴;$$

$$s=\frac{۲^۳-۱}{۲-۱}\cdot\frac{۳^۴-۱}{۳-۱}\cdot\frac{۵^۲-۱}{۵-۱}=۱۶۸۰,$$

$$m=۳ \text{ و } ۲^{m-۱}=۴;$$

مثال ۲ـ مطلوبست‌تعیین یك عددکه دارای۸مقسوم علیه وحاصل‌ضرب این مقسوم‌علیه‌ها برابر ۳۳۱۷۷۶ باشد .

بسهولت‌ثابت می‌شودکه حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه‌ها مساویست‌با جذر خود عدد به توان تعداد مقسوم‌علیه‌ها . یعنی اگر x عدد مفروض باشد داریم :

$$۳۳۱۷۷۶=\sqrt{x^۸} \Longrightarrow x=۲۴;$$

مثال ۳ ـ مطلوبست محاسبه دو عدد صحیح x ، y بطوریکه مجموع آنها ۱۲۷۰۰۸ و دارای ۴۵ مقسوم‌علیه مشترك باشند .

مقسوم‌علیه‌های مشترك آنها مقسوم علیه‌های D بزرگترین مقسوم علیه مشترك‌آنهامی‌باشد. ولی D یك مقسوم‌علیه مجموع $x+y$ می‌باشد وازطرفی $x+y=۱۲۷۰۰۸=۲^۵\times۳^۴\times۷^۲$; پس D بصورت $۲^\alpha\times۳^\beta\times۷^\gamma$ با شرط $\alpha\leqslant۵$ ، $\beta\leqslant۴$, $\gamma\leqslant۲$ می‌باشد . و چون :

$$(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)=۴۵$$

و
$$\alpha+۱\leqslant۶; \qquad \beta+۱\leqslant۵, \qquad \gamma+۱\leqslant۳;$$

پس ۴۵ را فقط می‌توان بدو صورت زیر تجزیه کرد :

$$۴۵=۳\times۵\times۳;$$
$$۴۵=۵\times۳\times۳;$$

و از آنجا برای $\mathbf{D}$ دو جواب زیر بدست می‌آید :

$$\mathbf{D}=۲^{۲}\times۳^{۴}\times۷^{۲}=۱۵۸۷۶;$$
$$\mathbf{D}'=۲^{۴}\times۳^{۲}\times۷^{۲}=۷۰۵۶;$$

با فرض $\mathbf{x}=\mathbf{D}\alpha$, $\mathbf{y}=\mathbf{D}\beta$ داریم :

$$\mathbf{D}(\alpha+\beta)=۱۲۷۰۰۸,$$

پس
$$\alpha+\beta=۱۲۷۰۰۸:۱۵۸۷۶=۸;$$

چون α,β نسبت بهم اولند پس برای آنها دو دسته جواب زیر بدست می‌آید:

$$\alpha=۷; \qquad \beta=۱;$$
$$\alpha=۵; \qquad \beta=۳;$$

اولاً ـ
$$\mathbf{x}=۱۵۸۷۶\times۷=۱۱۱۱۳۲;$$
$$\mathbf{y}=۱۵۸۷۶\times۱=۱۵۸۷۶;$$

ثانیاً ـ
$$\mathbf{x}=۱۵۸۷۶\times۵=۷۹۳۸۰;$$
$$\mathbf{y}=۱۵۸۷۶\times۳=۴۷۶۲۸;$$

اگر $\mathbf{D}'=۷۰۵۶;$ را در نظر بگیریم .

$$\alpha+\beta=۱۲۷۰۰۸:۷۰۵۶=۱۸;$$

پس :
$$\alpha=۱۷, \qquad \beta=۱;$$
$$\alpha=۱۳, \qquad \beta=۵;$$
$$\alpha=۱۱; \qquad \beta=۷;$$

و از آنجا دسته جوابهای زیر حاصل می‌شود :

اولاً :
$$\mathbf{x}=۷۰۵۶\times۱۷=۱۱۹۹۵۲;$$
$$\mathbf{y}=۷۰۵۶\times۱=۷۰۵۶;$$

ثانیاً :
$$\mathbf{x}=۷۰۵۶\times۱۳=۹۱۷۲۸;$$
$$\mathbf{y}=۷۰۵۶\times۵=۳۵۲۸۰;$$

ثالثاً: $x=۷۰۵۶\times ۱۱=۷۷۶۱۶;$

$$y=۷۰۵۶\times ۷=۴۹۳۹۲;$$

مثال ۴ـ مطلوبست محاسبهٔ دوعدد صحیح x ، y درصورتیکه‌اولی ۲۱ مقسوم‌علیه و دومی ۱۰مقسوم‌علیه و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها۱۸ باشد:

چون $۱۸=۲\times ۳^۲$, پس اعداد مطلوب بصورت زیر می‌باشند:

$$x=۲^{\alpha}\times ۳^{\beta}\times q,$$

$$y=۲^{\alpha'}\times ۳^{\beta'}=q',$$

تعداد مقسوم‌علیه‌های x عبارتست از:

$$(\alpha+۱)(\beta+۱)\ \ h=۲۱;$$

(که درآن h نتیجه‌نماهای‌اول موجوددرq می‌باشد) ازرابطه فوق‌نتیجه‌می‌شود که $\alpha=۲$, $\beta=۶$, $q=۱$, تعداد مقسوعلیه‌های y مساویست با:

$$(\alpha'+۱)(\beta'+۱)\ \ h'=۲\times ۵;$$

و ازآنجا $q'=۱$, $\alpha'=۱$, $\beta'=۴$ و در نتیجه:

$$x=۲^۶\times ۳^۲,\qquad y=۲\times ۳^۴;$$

مثال ۵ ـ مطلوبست محاسبهٔ عددصحیح n وعدداول $p>۳$ بطوریکه مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد $N=۲^n\times ۳\times p$ باستثنای خود عدد مساوی دو برابر عدد N باشد. (DESBOVES)

مجموع مقسوم‌علیه‌ها عبارتست از:

$$\frac{۲^{n+۱}-۱}{۲-۱}\cdot\frac{۳^۲-۱}{۳-۱}\cdot\frac{p^۲-۱}{p--۱}=(۲^{n+۱}-۱)۴(p+۱);$$

طبق‌فرض $(۲^{n+۱}-۱)۴(p+۱)-۲^n\times ۳\times p=۲\times ۲^n\times ۳\times p,$

یا $۴(۲^{n+۱}-۱)\cdot(p+۱)=۳p(۲^{n+۱}+۲^n),$

$$p=۸-\frac{۹}{۲^{n-۲}+۱};$$

که بازاء $n=۳$ داریم $p=۵$

« « $n=۵$ « $p=۷$

مثال ۶ ـ مطلوبست محاسبهٔ عدد چهار رقمی مضرب ۹ که دارای ۱۲ مقسوم‌علیه است ومجموع مقسوم‌علیه‌های آن نیزمضرب ۸ ودارای۱۸مقسوم‌علیه است .

عدد بصورت $N=3^{\alpha}.a^{\beta}.b^{\gamma}$ با شرط $\alpha\geqslant 2$ ، $\alpha+1\geqslant 3$ می‌باشد و چون

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots=$$
$$=12=6\times 2\times 1=4\times 3\times 1=3\times 4\times 1=3\times 2\times 2;$$

از آنجا :

۱) $\alpha=5;\quad \beta=1,\quad \gamma=0;$

۲) $\alpha=3;\quad \beta=2;\quad \gamma=0;$

۳) $\alpha=2;\quad \beta=3;\quad \gamma=0;$

۴) $\alpha=2;\quad \beta=1;\quad \gamma=1;$

بسهولت ثابت می‌شود که حالت‌های (۱) ، (۲) ، (۳) جواب نمی‌باشند بازاء حالت (۴) مجموع مقسوم‌علیه‌ها مساویست با :

$$\frac{3^3-1}{3-1}\cdot\frac{a^2-1}{a-1}\cdot\frac{b^2-1}{b-1}=13(a+1)(b+1);$$

طبق فرض

$$13(a+1)(b+1)=2^{\alpha'}\times 13^{\beta'}\times a'^{\gamma'}\ldots\quad(\alpha'\geqslant 3)$$
$$(\alpha'+1)(\beta'+1)(\gamma'+1)\ldots=18=6\times 3\times 1=9\times 2\times 1$$

و ازآنجا :

۵) $\alpha'=5;\quad \beta'=2;\quad \gamma'=0;$

۶) $\alpha'=8;\quad \beta'=1;\quad \gamma'=0;$

دسته (۵) جواب نمی‌باشد . و بازاء دسته (۶) جواب $a=7$ و $b=31$ را بدست می‌آوریم و در نتیجه عدد $N=1953$ می‌باشد .

تمرین

۱ـ[1] مطلوبست محاسبهٔ $\overline{abcd}$ بشرطی که $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ هردوعدداول بوده و مجموع آنها بصورت $\alpha\beta\beta\alpha$ تجزیه‌پذیر وتفاضل بین مجموع ارقام اولی و مجموع ارقام دومی برابر کوچکترین عدد اول باشد . (جواب: ۱۹۵۳)

۲ـ عدد n رقمی $A=۹۹۹...۹$ مفروض‌است‌ثابت کنید مجموع ارقام عدد $A^۲$ برابر ۹n است .

۳ـ اگر $n \geqslant k$ باشد ثابت کنید :

$$۱)\quad \overbrace{۳۳۳...۳}^{n}\times\overbrace{۳۳۳...۳}^{k}=\overbrace{۱۱۱...۱}^{k-۱}۰\overbrace{۹۹۹...۹}^{n-k}\overbrace{۸۸۸...۸}^{k-۱}۹;$$

$$۲)\quad \overbrace{۶۶۶...۶}^{n}\times\overbrace{۶۶۶...۶}^{k}=\overbrace{۴۴۴...۴}^{k-۱}۳\overbrace{۹۹۹...۹}^{n-k}\overbrace{۵۵۵...۵}^{k-۱}۶$$

$$۳)\quad (\overbrace{۹۹...۹}^{n})^۳=\overbrace{۹۹۹...۹}^{n-۱}۷\overbrace{۰۰۰...۰}^{n-۱}۲\overbrace{۹۹۹...۹}^{n-۱}۹;$$

۴ـ مطلوبست تعداد اعداد n رقمی با ارقام معنی‌دار (بدون رقم صفر) در پایه a (جواب: a^n)

۵ـ اعداد $(\overline{abab})_{۱۸}$ را چنان تعیین کنید که مربع کامل باشند
(نقل از نظریه اعداد دکترهشترودی)

جواب:

$$(۶۹۶۹)_{۱۸}=(\overline{\alpha\lambda})_{۱۸}^{۲},(۲\mu۲\mu)_{۱۸}=(۷۴)_{۱۸}^{۲},(\overline{\beta\alpha\beta\alpha})_{۱۸}=(\delta۸)_{۱۸}^{۲}$$

۶ـ[2] ثابت کنید که عدد $(\overline{aabb})_N$ بفرض $a+b=(\overline{۱۱})_N$ چنین تجزیه می‌شود :

$$(\overline{aabb})_N=(\overline{kh})_N\times(\overline{۱۱})^۲_N,$$

که درآن $k+h=N,$ و $k=a-۱$ می‌باشد در این‌صورت پایه را چنان تعیین کنید که :

۱ـ این مسأله در حل مسائل حساب مجموعهٔ علوم حل شده .

۲ـ نقل از کتاب نظریهٔ اعداد دکتر هشترودی .

$$(\overline{aabb})_N = c \times (\overline{۱۱})^۳_N$$

و ازآنجانتیجه بگیرید که $(\overline{aabb})_N$ در هیچ مبنایی بر $(۱۱)^۴_N$ بخش‌پذیر نیست . (جواب : $N=۲b,\ c=b$)

۷ـ ثابت‌کنید مجموع اعداد یك سیکل (تبدیل دوری یك عدد تشکیل یك سیکل را میدهد) برابر است با حاصل‌ضرب مجموع ارقام یکی از اعداد سیکل دوری در عددی که از ارقام برابر واحدتشکیل یافته است .

۸ـ عددی پیدا کنید که اگر آنرا بیك مربع کامل اضافه و یا از آن کم‌کنیم حاصل برابر مربع‌کامل دیگری گردد . (FIBONACCI)

[جواب : $۲ab+a^۲-b^۲$ و $۲ab-a^۲+b^۲$ و $(۴ab(a^۲-b^۲)$]

۹ـ اگر n صحیح و مثبت باشد ثابت‌کنید :

$$\frac{۱-a^n}{۱-a}+\frac{(۱-a^n)(۱-a^{n-۱})}{۱-a^۲}+$$
$$+\frac{(۱-a^n)(۱-a^{n-۱})(۱-a^{n-۲})}{۱-a^۳}+\dots+$$
$$+\frac{(۱-a^n)(۱-a^{n-۱})\dots(۱-a)}{۱-a^n}=n\,.$$

۱۰ ـ اعداد $\overline{۱b۱cbc}$ مضرب ۶۳ را پیدا کنید .

(جواب : ۱۰۱۸۰۸ ، ۱۹۱۸۹۸ ، ۱۷۱۱۷۱)

۱۱ـ اگر $s=a_۱+a_۲+\dots+a_n$ باشد ثابت‌کنید :

$$\frac{s}{s-a_۱}+\frac{s}{s-a_۲}+\dots+\frac{s}{s-a_n}>\frac{n^۲}{n-۱}\,.$$

۱۲ـ ثابت‌کنید :

$$۱۲\{(x+y+z)^{۲n}-(y+z)^{۲n}-(z+x)^{۲n}-(x+y)^{۲n}+$$
$$+x^{۲n}+y^{۲n}+z^{۲n}\}$$

بر

$$(x+y+z)^۴-(y+z)^۴-(z+x)^۴-(x+y)^۴+x^۴+y^۴+z^۴$$

بخش‌پذیر است .

۱۳ـ در یك صفحه n دایره رسم میکنیم بطوریکه هر دایره تمام دوایر دیگر را قطع کند وهیچ سه دایره هم ازیك نقطه نگذرند ثابت کنید تعداد نواحی حاصل مساویست با n^2-n+2 .

۱۴ـ اگر m و n اعداد صحیح و مثبت و $m>n$ و $x>0$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}}{m} \lessgtr \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{n}$$

برحسب اینکه $x \lessgtr 1$ باشد .

۱۵ـ مطلوبست محاسبهٔ اعداد صحیح x ، y از دستگاههای :

$$1)\begin{cases} x+y=150; \\ (x,y)=30; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} (x,y)=45; \\ x/y=11/7; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} xy=8400; \\ (x,y)=20; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} xy=20; \\ [x,y]=10; \end{cases}$$

جواب : $1)\ x=30,60,90;120 \quad 2)\ y=315 ، x=495$

$3)\ x=20,60,140;420 \quad 4)\ y=2,10 ، x=2,10$

۱۶ـ ثابت کنید :

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n.$$

۱۷ـ ثابت کنید اگر $x=3n+1$ باشد داریم :

$$1+3^x+9^x \ \vdots\ 13$$

۱۹ـ ثابت کنید معادلات $2^x+7^y=19^z$ و $2^x+5^y=19^z$ دارای جواب نمی‌باشد .

۲۰ـ مطلوبست محاسبهٔ باقیمانده تقسیم :

$(12371^{56}+34)^{28}$ بر ۱۱۱ (جواب: ۷۰)

۲۱ـ ثابت کنید :

$$1)\ (2^{32}+1)\ \vdots\ 641;$$

$$2)\ (222^{555}+555^{222})\ \vdots\ 7;$$

$$3)\ (220^{119^{69}}+69^{220^{119}}+119^{69^{220}})\ \vdots\ 102;$$

۲۲ـ در چه صورت $n^{2}-1$ و $3n+1$ نسبت بهم اولند .

(جواب : اگر n عدد زوجی باشد این دو عدد نسبت بهم اولند)

۲۳ـ اگر $\{a,b,m,n,\in N^{*}\}$ باشند و $m^{a}+n^{b}$ عدد اول باشد .
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b یك و یا قوائی از دومی باشد .

(D. ANDRÉ)

۲۴ـ اگر $a>b$ و $x>y$ و x، y، a و b اعداد صحیح ومثبت باشند مطلوبست محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x^{a}-y^{a}$ و $x^{b}-y^{b}$.

۲۵ـ اگر $2^{n-1}-1$ حاصلضرب دو عدد a و b باشد اعداد $a+1$ و $b-1$ حاصلضرب قوائی از ۲ در یك عدد فرد می‌باشند .

۲۶ـ هرعدد اول p که $a^{3}-1$ را عاد کندبدون اینکه $a-1$ را عاد کند $(a+1)^{6}-1$ را عاد خواهد نمود .

۲۷ـ مطلوبست محاسبهٔ عدد دو رقمی که مساوی جمع ارقامش باضافهٔ مجموع مربعات ارقامش منهای یك باشد .

۲۸ـ اگر $a>b>0$ و n عدد صحیح و مثبت باشد ثابت‌کنید :

$$a^{n}-b^{n}>n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}.$$

۲۹ـ اگر n عدد صحیح و مثبت باشد ثابت‌کنید :

$$n^{n}-n(n-2)^{n}+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n}-\ldots=2^{n}(n!).$$

۳۰ـ اگر a، b، c اعداد حقیقی و مثبت باشد ثابت‌کنید :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a^{8}+b^{8}+c^{8}}{a^{3}b^{3}c^{3}}.$$

۳۱ـ اگر $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ و n عدد فردی باشد ثابت‌کنید :

$$\frac{1}{a^{n}}+\frac{1}{b^{n}}+\frac{1}{c^{n}}=\frac{1}{a^{n}+b^{n}+c^{n}}$$

۳۲ـ اگر رابطهٔ زیر بازاء $n=\circ$ صحیح باشد ثابت کنید بازاء جمیع مقادیر عدد طبیعی n برقرار است .

$$\left(\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}\right)^{۲n+۱}+\left(\frac{c^{۲}+a^{۲}-b^{۲}}{۲ca}\right)^{۲n+۱}+$$
$$+\left(\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}\right)^{۲n+۱}=۱;$$

۳۳ـ اگر $a>\circ$ و n عدد صحیح و مثبت بزرگتر از ۲ باشد ثابت کنید $(۱+a)^n>۱+an$ وهمچنین اگر n صحیح ومثبت باشدثابت کنید:

$$۱-۳n+\frac{۳n(۳n-۳)}{۱\times۲}-\frac{۳n(۳n-۴)(۳n-۵)}{۱\times۲\times۳}+$$
$$+\dots=۲(-۱)^n.$$

۳۴ـ اگر اعداد a_j (که در آن $i=۱,\dots,n$ میباشد) همگی مثبت باشند ثابت کنید :

$$\prod_{i=۱}^{n}(۱+a_i)>۱+\sum_{i=۱}^{n}a_i;$$ (نامساوی وایرشتراس)

۳۵ـ اگر a و b اعداد مثبت و نامساوی باشند ، ثابت کنید :

$$a^n+a^{n-۱}b+a^{n-۲}b^{۲}+\dots+b^n>(n+۱)(ab)^{n/۲};$$

۳۶ـ در یك مثلث ثابت کنید :

$$abcp\geqslant a^{۳}(p-a)+b^{۳}(p-b)+c^{۳}(p-c).$$

و از آنجا نتیجه بگیرید :

$$\frac{abc}{r}\geqslant\frac{a^{۳}}{r_۱}+\frac{b^{۳}}{r_۲}+\frac{c^{۳}}{r_۳}$$

۳۷ـ اگر $\mu\geqslant\circ$ و x، y، z همگی مثبت باشند ، ثابت کنید:

$$\Sigma x^{\mu}(x-y)(x-z)\geqslant\circ;$$

۳۸ـ اگر n عدد صحیح و مثبت باشد ، ثابت کنید :

$$\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۳n+۱}+\frac{۱}{۳n+۲}+\dots+\frac{۱}{۵n}+\frac{۱}{۵n+۱}<\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\,; \qquad (n\geqslant 2)$$

۳۹ـ ثابت کنید :

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}$$

۴۰ـ اگر n عدد صحیح و مثبت باشد ثابت کنید :

$$2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}\left(\frac{n}{1}\right)^n\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdots\times$$
$$\times\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^1;$$

۱۳ـ سمبل $I[x/y]$

اگر a يك كسر و يا يك عدد اصم باشد علامت $I[a]$ و یا $[a]$ برای نشان دادن قسمت صحیح a بکار میرود پس اگر $x = qy + r$ باشد $0\leqslant r<y$ داریم $I[x/y]=q$.

علامت دیگری که معمولاً در نظر گرفته می‌شود $\{a\}=a-[a]$ می‌باشد که قسمت کسری و یا غیرصحیح را نشان می‌دهد .

قضیهٔ۱ـ اگر n_1، n_2، n_3، ... اعداد صحیح و s مجموع آنها و a عدد مفروض باشد در این صورت :

$$I[s/a]\geqslant I[n_1/a]+I[n_2/a]+I[n_3/a]+\cdots$$

چون با فرض $x_1=aq_1+r_1$ ، $x_2=aq_2+r_2$ ، $x_3=aq_3+r_3$، ... می‌توان نوشت :

$$s=a(q_1+q_2+q_3+\cdots)+(r_1+r_2+r_3+\cdots),$$
$$I[s/a]=q_1+q_2+q_3+\cdots+I[(r_1+r_2+r_3+\cdots)/a].$$

و چون $q_1=I[n_1/a]$, $q_2=I(n_2/a]$, ... پس حکم ثابت می‌شود .

قضیهٔ ۲ـ بزرگترین توان عدد اول p موجود در $n!$ عبارتست از :

$$I[n/p]+I[n/p^{۲}]+I[n/p^{۳}]+\cdots$$

چون اگر p عدد اولی باشد فاکتورهای $n!$ که بر p بخش پذیر می‌باشند عبارتند از p ، $۲p$ ، $۳p$ ، $\cdots p \cdot I[n/p]$ ،

پس $I[n/p]$ فاکتور از $n!$ بر p بخش پذیر می‌باشد بطریق مشابه $I[n/p^{۲}]$ فاکتور از $n!$ بر $p^{۲}$ بخش پذیر می‌باشد ، با ادامهٔ عمل ملاحظه می‌شود که عبارت فوق بزرگترین قوای p موجود در $n!$ می‌باشد .

مثال ۱ـ مطلوبست محاسبهٔ بزرگترین قوای ۵ موجود در !۱۸۵

داریم :

$$I[۱۵۸/۵]=۳۱ \text{ و } I[۱۵۸/۵^{۲}]=۶ ,\ I[۱۵۸/۵^{۳}]=۱$$

$$۳۸=۱+۶+۳۱= \text{بزرگترین قوای ۵ موجود};$$

مثال ۲ـ حاصلضرب n عدد متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است .

چون حاصلضرب n عدد متوالی را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$(m+۱)(m+۲)\cdots(m+n)=\frac{(m+n)!}{m!},$$

حال باید ثابت کنیم $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ عدد صحیح است. برای این منظور می گوئیم که اگر p عدد اول دلخواه موجود در $m!n!$ باشد حداقل با همان قوه در $(m+n)!$ موجود خواهد بود چون :

$$I[(m+n)/p]\geqslant I[m/p]+I[n/p]$$

و با تبدیل p به $p^{۲}$ ، $p^{۳}$ و... و جمع خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}I[(m+n)/p]+I[(m+n)/p^{۲}]+I[(m+n)/p^{۳}]+\cdots\\ \geqslant I(m/p]+m/p^{۲}]+I[m/p^{۳}]+\cdots\\ +I[n/p]+I[n/p^{۲}]+I[n/p^{۳}]+\cdots\end{aligned}$$

یعنی قوای p موجود در صورت از مخرج بیشتر است .

مثال ۳ـ اگر n یك عدد اول باشد C_n^r بر n بخش‌پذیر است .

چون باتوجه به‌بندقبل $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ بر $r!$ بخش‌پذیر است .

و چون n عدد اول و $r<n$ می‌باشد پس $r!$ نسبت به n اول است . و ازآنجا $r!$ یك مقسوم‌علیه $(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ و درنتیجه $n(n-1)\ldots(n-r+1)/r!$ بر n بخش‌پذیر است .

بنابراین اگر n یك عدد اول باشد تمام ضرایب بسط $(1+x)^n$ بجز اولی و آخری بر n بخش‌پذیر است .

نتیجه ـ اگر p عدد اولی باشد هر ضریب بسط $(a+b)^p$ جزاولی و آخری بر p بخش‌پذیر است .

تمرین

ثابت کنید :

ـ۱ $\dfrac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$ عدد صحیح است .

ـ۲ ثابت کنید $1-\dfrac{(72)!}{(36!)^2}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است .

ـ۳ $\dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ عدد صحیح است .

ـ۴ $\dfrac{(nr)!}{n!\,(r!)^n}$ عدد صحیح است .

ـ۵ $\dfrac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$ عدد صحیح است .

ـ۶ اگر a،b،c... اعدادی باشندکه مجموعشان عدد اول p است $p/(a!b!c!\ldots)$ عدد صحیح بخش‌پذیر بر p است .

۱۴ـ اگر p عدد اولی باشد ، در این صورت :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_N)^p=a_1^p+a_2^p+a_3^p+\cdots+M(p) \quad \ldots\ldots (1)$$

که بسهولت ثابت می‌شود .

۱۵ـ قضیهٔ فرما ـ اگر p عدد اول و N نسبت به p اول باشد $N^{p-1}-1$ مضربی است از p .

اگر در رابطهٔ (۱) بند ۱۴ فرض کنیم $a_1=a_2=\dots=a_N=1$, در این صورت داریم :

$$N^p=N+M(p),$$

$$N(N^{p-1}-1)=M(p),$$

چون N و p نسبت بهم اولند پس $N^{p-1}-1=M(p),$

مثال ـ ثابت کنید عبارت زیر بر n بخش‌پذیر است (n عددیست اول)

$$A=1(2^{n-1}+1)+2(3^{n-1}+\frac{1}{2})+3(4^{n-1}+\frac{1}{3})+\dots+$$
$$+(n-1)(n^{n-1}+\frac{1}{n-1}).$$

A را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$A=\{1\times 2^{n-1}+2\times 3^{n-1}+\dots(n-2)(n-1)^{n-1}\}+$$
$$+(n-1)n^{n-1}+n-1;$$

طبق قضیهٔ فرما هر یك از عبارات 2^{n-1} ، $3^{n-1},\dots,(n-1)^{n-1}$ بفرم $M(n)+1$ می‌باشد ، از آنجا :

$$A=\{1+2+3+\dots+(n-2)\}+$$
$$+(n-1)+(n-1)n^{n-1}+M(n).$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)[n^{n-1}+M(n)].$$

که مضربی‌است از n

تمرین

۱ـ اگر n عدد صحیحی باشد ثابت کنید: $[x+n]=[x]+n$،

۲ـ » » » صحیح و مثبتی باشد ثابت کنید :

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right].$$

۳ـ اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد ثابت‌کنید :

$$[x]+\left[x+\frac{۱}{n}\right]+\left[x+\frac{۲}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-۱}{n}\right]=[nx].$$

۴ـ مطلوبست حل :

$$۱)\ [x^۲]=۲; \qquad ۲)\ [۳x^۲-x]=x+۱;$$

$$۳)\ [x]=\frac{۳}{۴}x, \qquad ۴)\ [x^۲]=x.$$

۵ـ ثابت‌کنید :

$$\left[\frac{a}{۴}\right]+\left[\frac{۲a}{۴}\right]+\left[\frac{۳a}{۴}\right]=\frac{۳(a-۱)}{۲}, \qquad (a,۴)=۱;$$

۶ـ مطلوبست حل معادله: $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{x}{m-۱}\right]$, بشرطی که :

$$m=۲,۳,۴,\ldots$$

۷ـ اگر x یك عدد مثبت غیر صفر و $E(x)$ قسمت صحیح کوچکتر و یا مساوی با x را نشان دهد، مطلوبست بررسی تغییرات تابع $y=E(x)$ وقتیکه x از صفر تا $+۵$ تغییر کند .

مورد استعمال : معادله $۲E(x)+۳=۳x$ را حل‌کنید :

[جواب :

$$۰\leqslant x<۱, \qquad y=E(x)=۰,$$

$$۱\leqslant x<۲, \qquad y=E(x)=۱;$$

....

$$n\leqslant x<n+۱; \qquad y=E(x)=n;$$

ومعادله دارای جوابهای $\frac{۵}{۳}$ و $\frac{۷}{۳}$ و $x=۳$ می‌باشد .]

۸ـ اعداد **فیبو نانچی** عبارتند از :

$$۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\ldots$$

که درآن هرعدد صحیح (بعد از دومی) مجموع دوجمله بلافاصله ماقبل خود میباشد با استقرا ثابت‌کنید دو عدد متوالی فیبوناتچی نسبت بهم اولند .

۹ ــ اگر $n_۱$، $n_۲$ اعداد صحیح و مثبت باشند ثابت‌کنید :

$$(۲n_۱-۱)\,|\,(۲^{n_۱n_۲}-۱),$$

و نتیجه بگیرید که اگر $۲^n - ۱$ عدد اول باشد در اینصورت n عدد اول است.

[اگر p عدد اول باشد اعداد اول بفرم $۲^p - ۱$ **اعداد اول مرسن** نامیده می‌شود.]

۱۰- اگر k و r اعداد غیرمنفی صحیح باشند ثابت کنید:

$$(۲^{۲^r}+۱)\,|\,(۲^{۲^r(۲k+۱)}+۱)$$

ونتیجه بگیرید اگر $۲^n + ۱$ عدد اول باشد دراینصورت n قوائی از دو است.

[هر عدد اول بفرم $۲^{۲^r} + ۱$ **عدد اول فرما** نامیده می‌شود]

۱۱- **تعریف** عدد n را درصورتی مجموع مقسوم علیه‌های آن مساوی $۲n$ باشد **عدد کامل** می‌نامند.

ثابت کنید اگر $۲^p - ۱$ یك عدداول باشد دراینصورت $۲^{p-۱}(۲^p - ۱)$ عددکامل است.

۱۲- اگر اعداد صحیح $a_۱$، $a_۲$ طوری باشند $(a_۱,a_۲) = ۱$ ثابت کنید:

$$۱)-\quad (a_۱+a_۲, a_۱-a_۲) = ۱ \text{ یا } ۲؛$$

$$۲)-\quad (a_۱+a_۲, a_۱-a_۲, a_۱a_۲) = ۱؛$$

۱۳- ثابت کنید:

$$۱)-\quad (a,b)\{a,b\} = ab,$$

$$۲)-\quad (a,\{b,c\}) = \{(a,b),(a,c)\}.$$

$$۳)-\quad \{a,(b,c)\} = (\{a,b\},\{a,c\}).$$

$$۴)-\quad (cb,bc,ca) \vdots (a,b,c)^۲,$$

ثابت کنید:

$$۱۴-\quad ۶^{۲n+۱}+۵^{n+۲} \vdots ۳۱$$

$$۱۵-\quad a^{n+۱}-a(n+۱)+n \vdots (a-۱)^۲;$$

$$۱۶-\quad n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^۲+۳n-۱) \vdots (۳۰);$$

$$۱۷-\quad a^{۴m+r}-a^{۴n+r} \vdots (۳۰);$$

$$۱۸-\quad (۹n^۲+۱)^۲+(۳n^۲-۱)^۳ \vdots (۲^۲\times ۳^۳);$$

$$۱۹-\quad n(n^۲-۱)(n^۲-۴)(n^۲-۹) \vdots (۲^۷\times ۳^۲\times ۵\times ۷);$$

$$۲۰-\quad (n^۳-n)(۵^{۸n+۴}+۳^{۴n+۲}) \vdots (۳۸۰۴);$$

$$۲۱- \quad n^{۷}-۱۴n^{۵}+۴۹n^{۳}-۳۶n \vdots (۵۰۴۰);$$

$$۲۲- \quad ۳^{۴n+۱}+۱۰\times ۳^{۲n}-۱۳ \vdots (۶۴);$$

$$۲۳- \quad (n+۲m)^{n}-(n+۲m) \vdots (۲۴); \qquad (n=۲k+۱)$$

$$۲۴- \quad n(n^{۴}+۴)+۱۱۵n^{۲} \vdots (۱۲۰);$$

$$۲۵- \quad (x^{na-۱}+x^{nb-۲}+\ldots+x^{nl-n}) \vdots (x^{n-۱}+x^{n-۲}+\ldots+۱).$$

۲۶ـ اگر n یك عدد اول باشد ثابت کنید :

$$۱^{n-۱}+۲^{n-۱}+۳^{n-۱}+\ldots+(n-۱)^{n-۱}+۱ \vdots (n).$$

۲۷ـ ثابت کنید اگر a ، b نسبت به عدد اول n ، اول باشند داریم :

$$a^{n-۱}-b^{n-۱} \vdots (n).$$

۲۸ـ اگر x ، y نسبت به ۱۳۶۵ اول باشند ثابت کنید :

$$x^{۱۲}-y^{۱۲} \vdots (۱۳۶۵);$$

۲۹ـ اگر p یك عدد اول و N نسبت به p اول باشد ثابت کنید :

$$N^{p^{۲}-p}-۱ \vdots (p^{۲}), \qquad N^{p^{r}-p^{r-۱}}-۱ \vdots (p^{r}).$$

۳۰ـ اگر m و n اعداد اول باشند ثابت کنید :

$$m^{n-۱}+n^{m-۱}-۱ \vdots (mn).$$

۳۱ـ اگر m ، n و p همگی اول باشند ثابت کنید :

$$(np)^{m-۱}+(pm)^{n-۱}+(mn)^{p-۱}-۱ \vdots (mnp).$$

۳۲ـ اگر m یك عدد اول و a،b دو عدد کمتر از m باشند ثابت کنید:

$$a^{m-۲}+a^{m-۳}b+a^{m-۴}b^{۲}+\ldots+b^{m-۲} \vdots (m).$$

۳۳ـ ثابت کنید اگر p یك عدد اول و n نسبت به p اول باشد داریم:

$$n^{۱+۲+\ldots+(p-۱)}\pm ۱ \vdots (p^{۲}).$$

۳۴ـ اگر $N-a^{۲}=x$ و $(a+۱)^{۲}-N=y$ باشد (اعداد x ، y صحیح و مثبت) در این صورت : $N-xy$ مربع کامل است .

۳۵ـ اگر a عدد اول بزرگتر از ۱۹ باشد ثابت کنید :

$$a^{۱۸}-a \vdots (۹۵۷۶).$$

۳۶ـ مطلوبست سیکل درجهٔ سومی که اعداد به تصاعد حسابی باشند .

جواب:

۴°) ۷۴۰,۴۰۷,۰۷۴;	۱°) ۰۳۷,۳۷۰,۷۰۳;
۵°) ۸۵۱,۵۱۸,۱۸۵;	۲°) ۱۴۸,۴۸۱,۸۱۴;
۶°) ۹۶۲,۶۲۹,۲۹۶;	۳°) ۲۵۹,۵۹۲,۹۲۵;

۳۷ ــ مطلوبست سیکل درجهٔ ششمی باشرط مسأله قبل .

۳۸ ــ اگر $x^{۲}+۲y$ مربع کامل باشد، $x^{۲}+y$ مجموع دومربع کامل است.

۳۹ ــ اگرمجموع سه عدد زوج باشد ، مجموع مربعات آنها مساوی مجموع چهار مربع کامل است .

۴۰ ــ مطلوبست محاسبهٔ یك عدد صحیح مکعب یك عدد اول بطوریکه مجموع مربعات مقسوم‌علیه‌هایش (غیر از خودش) مساوی ۲۴۵۱ باشد .

(جواب: $۷^{۳}$)

۴۱ ــ مطلوبست محاسبهٔ n عددصحیح متوالی بطوریکه مجموع مربعات آنها مضربی از n باشد .

۴۲ ــ مطلوبست محاسبهٔعددصحیح N بطوریکه‌اگرآنرادر ۱۰۱۰ ضرب و با یك جمع کنیم حاصل مربع کامل باشد .

(V. THEBAULT) جواب : ۴۰

۴۳ ــ مطلوبست محاسبهٔ عددچهار رقمی $\overline{mcdu}$ بطوریکه :

$$\overline{mcdu}=K^{۲} \quad , \overline{mc}=l^{۲} \quad ; \overline{du}=k^{۲}$$

(جواب : $۴۱^{۲}$)

۴۴ ــ مطلوبست تعیین‌عدد سه رقمی که عدد یکان‌آن واحد و مربع‌آن بصورت abcba باشد . (جواب: ۱۰۱،۱۱۱،۱۲۱)

۴۵ ــ اگر p یك عدد بفرم $۶n\pm۱$ باشد ، $p^{۲}+۱$ مجموع چهار مربع کامل و همچنین مجموع سه مربع کامل و $\frac{p^{۲}+۱}{۲}$ مجموع دو مربع کامل می‌باشد .

۴۶ ــ مطلوبست‌تعیین دوعدد بامعلوم‌بودن تفاضل مکعبات‌آنها ۸۷۹۲.

(جواب: ۲۳ و ۱۵)

۴۷ — مطلوبست تعیین یك عدد بطوریکه مساوی مجموع ارقام مکعب خودش باشد . جواب: $(N=۱,۸,۱۷,۱۸,۲۶,۲۷)$

۴۸ — ثابت کنید:

۱) $ab(a^۲-b^۲)(a^۲-۲b^۲)(a^۲-۴b^۲) \;\vdots\; ۷;$

(DESBOVES)

۲) $(a^۳-۱)a^۳(a^۳+۱) \;\vdots\; ۵۰۴;$

۳) $(a^۲-۱)a^۲(a^۲+۱) \;\vdots\; ۶۰;$

۴۹ — **تعریف** : هرگاه n کوچکترین توانی از x باشد که با اساس p (عدداول) برابریك بشود. $x^n-۱\equiv ۰ (mod p)$ در اینصورت میگویند که x متعلق است به نمای n .

مسألهٔ ـ هرگاه x متعلق به‌نمای سه باشد $x+۱$ متعلق نمای ۶ است.
(A. LÉVY)

۵۰ — دردنبالهٔ توانهای ۵ از اولین جمله‌ای که دارای n رقم است این n رقم متناوبند و دورهٔ تناوب آنها $۲^{n-۲}$ جمله است. (G. FONTENÈ)

۱۶ـ همنهشتی[1] ـ دو عدد b ، c را وقتی همنهشت با اساس a گوئیم هنگامیکه چون بر a تقسیم شوند دارای یك باقیمانده باشند در این حال $b-c$ مضربی است از a که آنرا بفرم زیرنمایش میدهند :

$$b\equiv c(mod.a) \quad \text{یا} \quad b-c\equiv ۰(mod.a).$$

و برای اختصار آنرا بفرم $b\equiv c$ نیز می‌نویسند و اگر $b-c$ مضربی از a نباشد مینویسیم $b\not\equiv c(mod a)$ و میگوئیم b و c **غیرهمنهشت** با اساس a می‌باشند .

۱۷ـ قضایای اصلی ـ اگر $a\equiv b(mod\, n)$ و $a'\equiv b'(mod\, n)$ باشد داریم :

---

۱ ـ مفهوم همنهشتی از مفاهیم انقلابی است که گوس در نامگذاریها و اصطلاحات علم حساب وارد نمود و علامت $\equiv$ برای نمایش همنهشتی اولین‌بار توسط خودگوس بکار برده شده است .

(۱) $$a+a'\equiv b+b',$$

(۲) $$a-b\equiv a'-b',$$

(۳) $$aa'\equiv bb', \quad \text{درحالت خاص} \quad ac\equiv bc$$

(۴) اگر a و b بر d بخش‌پذیر و a نسبت به n اول باشد : $a/d\equiv b/d$

بنا بفرض $a-b$ ، $a'-b'$ مضربی از n می‌باشند پس :

$$(a+a')-(b+b')=kn, \quad (a-a')-(b-b')=k'n,$$

همچنین
$$aa'-bb'=(a-b)a'+(a'-b')b,$$

در نتیجه $aa'-bb'$ مضربی از n می‌باشد . برای اثبات (۴) می‌نویسیم : $a-b=kn$ و چون $a/d-b/d=(k/d)n$ نتیجه می‌شود که :

$$a/d\equiv b/d(\bmod n).$$

در حالت خاص **اگر** $a\equiv b(\bmod p)$ **که در آن p عددیست اول و اگر d مقسوم علیه مشترکی از a و b باشد در این صورت رابطه $a/d\equiv b/d(\bmod p)$ بجز وقتی‌که $d\equiv 0(\bmod p)$ باشد،برقرار است.**

بنابراین بین همنهشتی با اساس عدد اول و تساوی تشابه‌نزدیکی وجود دارد .

۱۸ـ اگر $b_1, b_2, b_3, \ldots$ به ترتیب همنهشت‌با $c_1, c_2, c_3, \ldots$ باساس a باشند حاصل ضرب‌های $b_1b_2b_3\ldots$ و $c_1c_2c_3\ldots$ نیزهمنهشت خواهند بود.

چون بنا بفرض :

$$b_1-c_1=n_1a, \quad b_2-c_2=n_2a, \quad b_3-c_3=n_3a, \ldots$$
$$n_1, n_2, n_3, \ldots \in Z,$$

$$\therefore \quad b_1b_2b_3\ldots=(c_1+n_1a)(c_2+n_2a)(c_3+n_3a)\ldots=$$
$$=c_1c_2c_3\ldots+M(a).$$

که درحالت خاص $b_1=b_2=\ldots=b$ ، $c_1=c_2=c_3=\ldots=c$ داریم:

$$b^m\equiv c^m.$$

۱۹ـ اگر در تابع منطق و صحیح با ضرایب صحیح :

$$S=\sum A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}x_1^{\alpha_1}\ldots x_k^{\alpha_k}.$$

$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ ، x_1 ، x_2 ، ... ، x_k را به $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ ، y_1 ، y_2 ، ... ، y_k که همنهشت با اساس m می‌باشند بدل کنیم عبارت جدید S همنهشت با عبارت قبلی با اساس m می‌باشد.

چون :
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \equiv B_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \pmod m.$$
$$x^{\alpha_1} \equiv y^{\alpha_1} \pmod m.$$

....

$$x^{\alpha_k} \equiv y^{\alpha_k} \pmod m.$$
$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \equiv B_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_k^{\alpha_k}.$$

که با جمع نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۲۰ـ مجموعه مانده‌های با اساس m ـ تمام اعدادی که در تقسیم بر m باقیمانده r داشته باشند تشکیل یك طبقه می‌دهند و به C_r نشان داده می‌شوند.

هر عدد با باقیمانده تقسیم‌اش بر m همنهشت با اساس m است و m باقیمانده :

$$0, 1; 2; \ldots m-1;$$

وجود دارد که تشکیل m طبقه C_0 ، C_1 ، ... ، C_{m-1} را میدهند (C_0 یعنی اعدادی که بر m بخش‌پذیرند و C_1 یعنی اعدادی که بر m تقسیم شوند باقیمانده یك میدهند و ...) درحقیقت C_r بازاء

$$r = 0, 1; \ldots, m-1,$$

از تمام اعداد صحیح $km+r$ که در آن $k = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$ می‌باشد تشکیل می‌شود ، مجموعه‌های C_0 ، C_1 ، C_2 ، ... ، C_{m-1} طبقات همنهشت با اساس m نامیده می‌شوند. اگر x_i عدد صحیحی در C_i باشد چون $i = 0, 1, \ldots m-1$ می‌باشد پس m عدد صحیح $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ حاصل می‌شود که **دستهٔ کامل باقیمانده با اساس m** نامیده می‌شود. پس هر عدد صحیح فقط و فقط با یکی از اعداد صحیح x_i با اساس m همنهشت می‌باشد. ساده‌ترین چنین دستگاهی دسته $0, 1, \ldots, m-1$ می‌باشد اعداد صحیح در آن الزامی ندارند که دارای ترتیب خاصی باشند ودیگر دسته، کامل باقیمانده‌های

با اساس m عبارت از :

$$1,2;3;\dots,m \quad \text{و} \quad m,m+1,\dots,2m-1$$ و همین طور ...

دستگاههای دیگری که در آن تمام اعداد صحیح، غیرمنفی نمی‌باشند

مجموعه‌ایست از m عدد صحیح x صادق در نامساوی $-\frac{1}{2}m \leqq x < \frac{1}{2}m$

چون قدر مطلق باقیمانده‌های تقسیم یك عدد صحیح بر m در این فاصله قرار گرفته است .

برای مثال $\{6;5;4;3;2;1;0\}$ و $\{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$ دسته‌های کامل باقیمانده با اساس ۷ می‌باشند .

قضیهٔ ۱ـ اولاً اگر $x_0, x_1, \dots x_{m-1}$; دسته کامل باقیمانده‌های با اساس m وعددصحیح a طوری‌باشد که $(a,m)=1$; و b هم عددصحیحی باشد در این صورت :

$$ax_0+b,\ ax_1+b, \dots\dots, ax_{m-1}+b, \dots\dots \qquad (1)$$

یك دسته‌کامل باقیمانده با اساس m می‌باشد .

ثانیاً ـ اگر $(m,n)=1$ و $x_0, x_1, \dots x_{m-1}$ دسته کامل باقیمانده با اساس m و $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ دسته‌کامل باقیمانده بااساس n باشد دراین صورت mn عددصحیح (nx_i+my_j) که در آن :

$$(i=0,1,\dots,m-1, j=0,1,\dots,n-1)$$

می‌باشد دسته‌کامل باقیمانده با اساس mn را تشکیل می‌دهند .

اولاً ـ دوعدد صحیح مختلف در (۱) غیر همنهشت بااساس m می‌باشند چون‌اگر $ax_i+b \equiv ax_j+b \pmod m$ پس: $ax_i \equiv ax_j \pmod m$ و از آنجا با توجه به ۱۷ـ (۳) داریم : $x_i \equiv x_j \pmod m$ و در نتیجه: $x_i = x_j$ و چون (۱) شامل m عدد صحیح می‌باشد پس دسته‌کامل باقیمانده با اساس m می‌باشد .

ثانیاً ـ اگر $nx_i+my_j \equiv nx_k+my_l \pmod{mn}$ پس : $nx_i \equiv nx_k \pmod m$ و $my_j \equiv my_l \pmod n$ و ازآنجا با توجه به قضیهٔ ۱۷ـ (۳) داریم : $x_i \equiv x_k \pmod m$, و $y_j \equiv y_l \pmod n$ و در نتیجه $x_i \equiv x_k$ و $y_j \equiv y_l$ پس mn عدد صحیح (nx_i+my_j)

یك دستهٔ کامل باقیمانده با اساس mn را تشکیل می‌دهند .

لم۱ ـ اگر $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ دراین‌صورت $(a,m)=(b,m)$.

اگر $a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ باشد داریم $a-b=km$, و در نتیجه :

$(a,m)=(b+km,m)$ و از آنجا با توجه به مثال ۲ بند ۹ :

$$(a,m)=(b,m)$$

برعکس لم فوق محقق نیست چون برای مثال : $۱=(۳,۴)=(۱,۴)$ ولی

$$۳\not\equiv ۱(\mathrm{mod}\, ۴).$$

از لم فوق نتیجه می‌شود که تمام اعداد صحیح موجود در یك طبقهٔ مفروض ، همنهشت با اساس m دارای یك بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك با m می‌باشند. بخصوص اگر یکی از اعداد صحیح در یك کلاس همنهشتی نسبت به m اول باشد تمام اعداد آن کلاس چنین می‌باشند . اما $\varphi(m)$ (بند ۲۲) عدد صحیح در دستهٔ کامل باقیمانده‌های $۰,۱,\ldots m-۱$ با اساس m موجود است که نسبت به m اولند بنابراین $\varphi(m)$ طبقهٔ همنهشتی موجودند که از اعدادصحیح اول نسبت به m تشکیل می‌شوند هرمجموعه از $\varphi(m)$ عددصحیح از کلاسهای مختلف را **باقیمانده‌های ساده** (تحویل‌شده) با اساس m می‌نامند .

هرعددصحیح که نسبت‌به m اول‌باشد با یکی از این $\varphi(m)$ عددصحیح همنهشت با اساس m می‌باشد .

برای مثال $۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶$ دستهٔ کامل باقیمانده‌های با اساس ۷و $۱,۲,۳,۴,۵,۶$ دستهٔ ساده باقیمانده‌های با اساس ۷و $۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹$ دستهٔ‌کامل باقیمانده‌های بااساس ۱۰و $۱,۳,۷,۹$ دسته ساده باقیمانده‌های با اساس ۱۰ می‌باشند .

قضیهٔ ۲ـ اولاً ـ اگر $x_۱,x_۲,\ldots x_{\varphi(m)}$ دسته ساده باقیمانده‌های با اساس m و عدد صحیح a طوری باشد که $۱=(a,m)$ در این صورت :

$$ax_۱,\ ax_۲,\ \cdots\ ax_{\varphi(m)},$$

یك دسته ساده باقیمانده‌های با اساس m می‌باشد .

ثانیاً ـ اگر $۱=(m,n)$ و $x_۱,x_۲,\ldots x_{\varphi(m)}$ دسته ساده باقیمانده بااساس m و $y_۱,y_۲,\ldots y_{\varphi(n)}$ دسته ساده باقیمانده‌های با اساس n باشد در این صورت اعداد بشکل nx_i+my_j که در آن :

$$i=۱,۲,\ldots\varphi(m)\ \text{و}\ j=۱,۲,\ldots\varphi(n)$$

و به تعداد $\varphi(m)\,\varphi(n)=\varphi(mn)$ می‌باشند دستهٔ کامل باقیمانده‌های ساده با اساس mn را تشکیل می‌دهند.

که آنرا می‌توان مشابه قبل اثبات نمود و آنرا بعنوان تمرین واگذارمیکنیم.

قضیهٔ ۳ـ (قضیهٔ اولر) اگر $(a,m)=1$; باشد در این صورت:

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m.$$

فرض کنیم $x_1, x_2, \dots x_n$ که در آن $n=\varphi(m)$ می‌باشد دسته ساده باقیمانده‌های با اساس m باشد در این صورت با توجه به قضیهٔ (۲) اعداد: $ax_1, ax_2, \dots ax_n$ نیز دسته ساده باقیمانده با اساس m می‌باشند در نتیجه $ax_1, ax_2, \dots ax_n$ با $x_1, x_2, \dots x_n$ همنهشت با اساس m می‌باشند (البته الزامی ندارد که با همین ترتیب باشند) با ضرب این همنهشتی‌ها داریم:

$$ax_1\, ax_2 \cdots ax_n \equiv x_1 x_2 \cdots x_n \pmod m.$$

یعنی
$$a^{\varphi(m)} x_1 x_2 \cdots x_n \equiv x_1 x_2 \cdots x_n \pmod m$$

و اما چون $(x_1 x_2 \cdots x_n, m)=1$ با توجه به ۱۷ـ (۳) نتیجه می‌شود که

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m.$$

اگر $m=p$ یك عدد اول و $(a,p)=1$ باشد در این صورت: $\varphi(p)=p-1$ و از آنجا قضیهٔ فرما $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ فوراً از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود. از قضیهٔ فرما فوراً نتیجه زیر بدست می‌آید.

اگر p یك عدد اول باشد بازاء هرعدد صحیح a داریم:

$$a^p \equiv a \pmod p \quad \text{.........................} (1)$$

چون اگر $(a,p)=1$, باشد پس $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. و در نتیجه: $a^p\equiv a \pmod p$ و اگر $(a,p)\neq 1$ باشد در این صورت $(a,p)=p$ و در این حال $a^p\equiv a\equiv 0 \pmod p$ و نتیجه می‌شود که رابطهٔ (۱) بازاء جمیع مقادیر a برقرار است.

اگر $(a,m)=1$ باشد در این صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت r که رابطهٔ $a^r\equiv 1 \pmod m$ را برقرارنمایند مرتبه a بااساس m گویند. قضیهٔ اولر نشان می‌دهد که r وجود داشته ودرشرط $r\leqq\varphi(m)$ صادق می‌باشد.

باید توجه داشت که اگر $(a,m)>۱$ باشد در این صورت r وجود ندارد. چون $(a,m)|۱$ رابطه $a^r \equiv ۱ \pmod m$ موجب $a^r = ۱ + km$ بازاء عدد صحیح و دلخواه k می‌شود اگر $r>۰$ باشد از این رابطه نتیجه می گیریم که $(a,m)|۱$ و بنابراین (a,m) نمی‌تواند بزرگتر از یك باشد.

مثال ـ اگر $(a,b)=۱$؛ باشد در تقسیم مقادیر:

$$a, ۲a, ۳a, \ldots (b-۱)a,$$

بر b تمام باقیمانده‌ها مختلف می‌باشند.

چون اگر باقیمانده تقسیم دو مقدار $m'a, ma$ بر b مساوی r باشد داریم:

$$ma = qb + r \quad \text{و} \quad m'a = q'b + r,$$

$$\therefore \qquad (m-m')a = (q-q')b; \qquad (m, m' < b)$$

در این‌جا باید $m - m'$ مضربی‌از b باشدکه غیرممکن است چون m و m' هر دوکمتر از b می‌باشند.

پس تمام باقیمانده‌ها مختلف می‌باشند وچون هیچکدام از مقادیر بر b بخش‌پذیر نیستند پس باقیمانده‌ها جملات سری

$$۱; ۲; \ldots; b-۱;$$

می‌باشند البته لازم نیست باقیمانده‌ها دارای ترتیب فوق باشند.

نتیجه ـ اگر $(a,b)=۱$ و c عددصحیحی باشد b جملهٔ تصاعدحسابی:

$$c, \; c+a, \; c+۲a, \ldots \; c+(b-۱)a,$$

وقتی بر b تقسیم شوند، باقیمانده‌ها مساوی باقیمانده‌های تقسیم جملات سری:

$$c; \; c+۱; \; c+۲; \ldots \; c+(a-۱),$$

می‌باشند (البته‌لازم‌نیست که‌به ترتیب‌فوق باشد) بنابراین باقیمانده‌هاعبارتنداز:

$$۰, ۱; ۲; \ldots b-۱$$

۲۱ـ قضیهٔ فرما را می‌توان با روش فوق ثابت نمود:

چون N و p نسبت به هم اولند پس اعداد

$$N, \; ۲N, \; ۳N, \ldots \; (p-۱)N, \qquad (۱)$$

وقتی بر p تقسیم شوند دارای باقیمانده‌های :

$$۱,\ ۲,\ ۳, \dots (p-۱); \qquad (۲)$$

می‌باشند پس حاصل ضرب تمام جملات (۱) همنهشت با حاصل ضرب تمام جملات (۲) با اساس p می‌باشند .

یعنی $N^{p-۱}(p-۱)!$ و $(p-۱)!$; وقتی بر p تقسیم شوند دارای یك باقیمانده می‌باشند پس :

$$(p-۱)!(N^{p-۱}-۱)=M(p);$$

و چون $(p-۱)!$ و p نسبت به هم اول می‌باشند پس :

$$N^{p-۱}-۱=M(p).$$

۲۲ـ تعداد اعداد صحیح وکمتر از n و اول نسبت به آنرا با سمبل $\varphi(n)$[1] نمایش می‌دهند پس $\varphi(۲)=۱$ و $\varphi(۱۳)=۱۲$ و $\varphi(۱۸)=۶$; چون اعداد اول کمتر از ۱۸ عبارتند از ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، بطوریکه ملاحظه می‌شود واحد را می‌توان بعنوان عدداول نسبت به تمام اعداد درنظر گرفت.

۲۳ـ ثابت‌کنید اگر a، b، c، d، ... نسبت‌به هم اول‌باشند داریم:

$$\varphi(abcd\dots)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)\cdot\varphi(c)\dots$$

حاصل‌ضرب ab را در نظر می‌گیریم . حاصل‌ضرب ab عدد اولیه را می‌توان در b سطر شامل a عدد نوشت پس :

$$\begin{array}{llll}
۱; & ۲;\dots\dots & k;\dots\dots & a; \\
a+۱; & a+۲;\dots\dots & a+k;\dots\dots & a+a; \\
۲a+۱; & ۲a+۲;\dots\dots & ۲a+k;\dots\dots & ۲a+a; \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(b-۱)a+۱; & (b-۱)a+۲; & (b-۱)a+k; & (b-۱)a+a;
\end{array}$$

حال ستونی‌که با k شروع می‌شود در نظرمی‌گیریم اگر k نسبت به a اول باشد تمام جملات این ستون نسبت به a اولند و اگر k و a مقسوم علیه‌ـ مشترکی داشته باشد جمله‌ای در این ستون نیست که نسبت به a اول باشد . سطر، شامل $\varphi(a)$ عدد اول نسبت به a می‌باشد پس $\varphi(a)$ ستون وجود داردکه

۱ـ تابع $\varphi(n)$ را تابع اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) نیز می‌نامند .

در هر کدام آنها هر جمله نسبت به a اول است . فرض کنیم ستونی که با k شروع می‌شود یکی از آنها باشد این ستون تشکیل تصاعد حسابی می‌دهد و جملات آن وقتی بر b تقسیم شوند طبق بند قبل باقیمانده $\{۰,۱,۲,...b-۱\}$ بوجود می‌آورند و از آنجا این ستون شامل $\varphi(b)$ عدد است که نسبت به b اول می‌باشند .

بنابراین در جدول $\varphi(a).\varphi(b)$ عدد صحیح وجود دارند که نسبت به a و b اولند پس برای ab داریم :

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

$$\varphi(abc\ldots d)=\varphi(a)\cdot\varphi(bcd\ldots)$$

$$=\varphi(a)\cdot\varphi(b)\cdot\varphi(cd\ldots)$$

$$=\varphi(a)\cdot\varphi(b)\cdot\varphi(c)\cdot\varphi(d)\ldots$$

۲۴ـ اگر p عدد اول باشد داریم : $\varphi(p^r)=p^r(۱-۱/p)$

این حکم بازاء $r=۱$ روشن است .

اگر $r>۱$ باشد چون p عدد اولی است از اعداد $۱;۲;۳;\ldots;p^r$ آنهائی که نسبت به p^r اول نیستند عبارتند از: $p،۲p،۳p،\ldots p^r$ که تعدادشان می‌شود $p^{r-۱}$ و بقیهٔ اعداد، نسبت به p^r اولند و تعدادشان مساویست با : $p^r-p^{r-۱}$ که حکم را ثابت می‌کند .

در نتیجه در مورد عدد $N=p^a.q^b.r^c\ldots\ldots$ (که در آن $p،q،r\ldots\ldots$ فاکتورهای اول می‌باشند) داریم :

$$\varphi(N)=N\left(۱-\frac{۱}{p}\right)\left(۱-\frac{۱}{q}\right)\left(۱-\frac{۱}{r}\right)\ldots\ldots$$

مثال ۱ـ مطلوبست تعیین تعداد اعداد کوچکتر از N و اول نسبت به آن درصورتی که :

$$N=۱۰۲۴;\ ۱۰۲۵;\ ۱۰۲۶$$

داریم : $۱۰۲۴=۲^{۱۰}\Longrightarrow\varphi(۱۰۲۴)=۱۰۲۴\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)=۵۱۲\,;$

$$۱۰۲۵ = ۵^۲ \times ۴۱ \Longrightarrow \varphi(۱۰۲۵) =$$
$$= ۱۰۲۵\left(۱-\frac{۱}{۵}\right)\left(۱-\frac{۱}{۴۱}\right) = ۸۰۰;$$
$$۱۰۲۶ = ۲ \times ۳^۳ \times ۱۹ \Longrightarrow \varphi(۱۰۲۶) =$$
$$= ۱۰۲۶\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)\left(۱-\frac{۱}{۱۹}\right) = ۳۲۴;$$

مثال ۲ـ عددی ازحاصل‌ضرب سه عامل اول تشکیل شده است بطوری که مجموع مربعات این سه عامل ۲۳۳۱ می‌باشد . تعداد اعداد کوچکتر از این عدد (بانضمام واحد) که نسبت به آن اولند ۷۵۶۰ می‌باشد مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد(بانضمام یك وخودعدد) مساوی ۱۰۵۶۰ می‌باشد مطلوبست تعیین این عدد .

اگر عامل‌های اول را a،b،c بنامیم داریم :

$$a^۲+b^۲+c^۲ = ۲۳۳۱;$$

و $$abc\left(۱-\frac{۱}{a}\right)\left(۱-\frac{۱}{b}\right)\left(۱-\frac{۱}{c}\right) = (a-۱)(b-۱)(c-۱) = ۷۵۶۰$$

$$(a+۱)(b+۱)(c+۱) = ۱۰۵۶۰,$$

ازترکیب این معادلات $a+b+c=۷۳$ و درنتیجه :

$$abc = ۸۹۸۷ = ۱۱ \times ۱۹ \times ۴۳$$

مثال ۳ـ ثابت‌کنید مجموع تمام اعداد صحیح کمتر از N واول‌نسبت به‌آن مساویست با $\frac{۱}{۲}N\varphi(N)$.

اگر x عدد صحیح کمتر N واول نسبت به‌آن باشد $N-x$ هم نسبت به N اول است .

پس اگر اعدادصحیح کوچکتر ازN را به‌۱، p، q، r، ...... ومجموعشان را به S نمایش دهیم داریم :

$$S = ۱+p+q+r+\dots\dots+$$
$$+(N-r)+(N-q)+(N-r)+(N-۱); \dots\dots\dots\dots\dots (A)$$

اگر سری را به ترتیب عکس نوشته وجمع کنیم خواهیم داشت :

$$۲S=N+N+N+\dots\dots \text{ تا } \varphi(N) \text{ جمله}$$

$$S=\frac{۱}{۲}N\varphi(N).$$

۲۵ ـ ازقضیهٔ اخیر نتیجه می‌شودکه تعداد اعداد صحیحی‌که‌کمتر از N می‌باشند ولی باآن اول نیستند عبارتند از :

$$N-N\left(۱-\frac{۱}{p}\right)\left(۱-\frac{۱}{q}\right)\left(۱-\frac{۱}{r}\right)\dots\dots$$

یعنی $\dots\dots+\frac{N}{pqr}+\dots\dots-\frac{N}{qr}-\frac{N}{pr}-\frac{N}{pq}-\dots\dots+\frac{N}{r}+\frac{N}{q}+\frac{N}{p}$

در این‌جا $\frac{N}{p}$ تعداد اعداد صحیح

$$p,۲p,۳p,\ \dots\dots\ \frac{N}{p}\cdot p$$

که شامل عامل p می‌باشند نشان می‌دهد . جملهٔ $\frac{N}{pq}$ نیز تعداد اعداد صحیحی که بشکل $pq,۲pq,۳pq,\dots\dots\frac{N}{pq}\cdot pq$ می‌باشندنشان می‌دهد . بعلاوه هرعدد صحیح فقط وفقط یکبار بحساب می‌آید . چون هرمضرب pq یکبار درمیان مضارب p یکبار درمیان مضارب q و یکبار با علامت منفی در میان مضارب pq ظاهر می‌شود بنابراین‌این مضرب‌فقط یکبار حساب می‌شود.

همچنین هرمضرب pqr به تعداد جملات $\frac{N}{p}$ ، $\frac{N}{q}$ ، $\frac{N}{r}$ (یعنی ۳) بار در میان مضارب r،q،p به‌ترتیب و به تعداد جملات $\frac{N}{pq}$ ، $\frac{N}{pr}$ ، $\frac{N}{qr}$ درمیان مضارب qr،pr،pq به ترتیب و یك‌بار میان درمیان مضارب $\frac{N}{pqr}$ ظاهر می‌شود وچون ۱ = ۱ + ۳ − ۳ پس هرمضرب pqr فقط و فقط یکبار بحساب میآید وبحث را می‌توان بهمین‌ترتیب ادامه داد .

مثال ۱ـ ثابت کنید مجموع مربعات ومکعبات تمام اعداد کمتر از N و اول نسبت به‌آن مساویست با :

$$\frac{N^{3}}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+$$

$$+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots$$

$$\frac{N^{4}}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+$$

$$+\frac{N^{2}}{4}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots$$

(که درآن a، b، c،..... عاملهای اول مختلف موجود در N می‌باشند).

ابتدامجموع مربعات‌اعداد کمتراز N که نسبت به‌آن‌اول نیستندبدست می‌آوریم که با مجموع زیر داده می‌شود :

$$a^{2}+(2a)^{2}+(3a)^{2}+\cdots+\left(\frac{N}{a}\cdot a\right)^{2}$$

$$+b^{2}+(2b)^{2}+(3b)^{2}+\quad+\left(\frac{N}{b}\cdot b\right)^{2}+\cdots+$$

$$-(ab)^{2}-(2ab)^{2}-\cdots-\left(\frac{N}{ab}\cdot ab\right)^{2}-\cdots+$$

$$+(abc)^{2}+(2abc)^{2}+(3abc)^{2}+\cdots+\left(\frac{N}{abc}\cdot abc\right)^{2}+\cdots$$

چون :
$$a^{2}+(2a)^{2}+(3a)^{2}+\cdots+\left(\frac{N}{a}\cdot a\right)^{2}=$$

$$=\frac{1}{6}a^{2}\frac{N}{a}\left(\frac{N}{a}+1\right)\left(\frac{2N}{a}+1\right)=\frac{N^{3}}{3a}+\frac{N^{2}}{2}+\frac{Na}{6};$$

وازآنجامجموع تمام اعداد کمتر از N که نسبت به‌آن اول نیستند عبارتست از:

$$\frac{N^{۳}}{۳}\left\{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\cdots-\frac{۱}{ab}-\frac{۱}{ac}-\cdots+\frac{۱}{abc}+\cdots+\right\}+$$

$$+\frac{N^{۲}}{۲}\left\{m-\frac{m(m-۱)}{۱\times۲}+\frac{m(m-۱)(m-۲)}{۱\times۲\times۳}-\cdots\right\}$$

$$+\frac{N}{۶}\left\{a+b+c+\cdots-ab-ac-\cdots+abc+\cdots\right\};$$

(m تعداد اعداد اول موجود در N است)

بنابراین ضریب $\;۱=(۱-۱)^{m}-۱=\;$; $\frac{N^{۲}}{۲}$ وازآنجا مجموع مربعات تمام اعداد (اول نسبت به N) وکمتر از N مساویست با حاصل تفریق عبارت فوق از $(N+۱)(۲N+۱)\frac{N}{۶}$ و یا $\frac{N^{۳}}{۶}+\frac{N^{۲}}{۲}+\frac{N}{۶}$ و نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

فرض می‌کنیم باتوجه به مثال ۳ بند ۲۴ اگر x یکی از اعداد صحیح (A) باشد . دراین‌صورت $\Sigma x^{۳}=\Sigma(N-x)^{۳}$ چون هریك از این‌عبارات مجموع همان سری جملات را می‌دهد که فقط ترتیب آنها معکوس شده‌است .

ازآنجا (باتوجه به‌مثال ۳ بند ۲۴) :

$$\Sigma x^{۳}=\Sigma N^{۳}-۳\Sigma N^{۲}x+۳\Sigma Nx^{۲}-\Sigma x^{۳},$$

یعنی :

$$۲\Sigma x^{۳}=N^{۳}\varphi(N)-۳N^{۲}\Sigma x+۳N\Sigma x^{۲},$$

چون تعداد جملات $\varphi(N)$ است و $\Sigma x=\frac{۱}{۲}N\varphi(N)$ وباتوجه به‌قسمت‌قبل:

$$\Sigma x^{۲}=\frac{N^{۲}}{۳}\varphi(N)+\frac{N}{۶}(۱-a)(۱-b)(۱-c)\cdots$$

$$\therefore\quad ۲\Sigma x^{۳}=\frac{N^{۳}}{۲}\varphi(N)+\frac{N^{۲}}{۲}(۱-a)(۱-b)(۱-b)\cdots$$

بطورکلی می‌توان مجموع قوای rام این اعداد را توسط قضیهٔ زیر محاسبه نمود :

۲۶ـ محاسبهٔ مجموع قوای rام n عدد اولیه اعداد طبیعی.

مجموع را به S_n نمایش می‌دهیم در اینصورت :

$$S_n=1^r+2^r+3^r+\dots+n^r, \qquad (r\in N^*)$$

فرض کنیم :

$$S_n=A_0n^{r+1}+A_1n^r+A_2n^{r-1}+\dots+A_rn+A_{r+1}\dots\dots(1)$$

که درآن ضرایب A_0، A_1، ...... مقادیری هستند که بایدتعیین شوند.

n را به $n+1$ تبدیل کرده و (۱) را از نتیجهٔ حاصل کم می کنیم :

$$(n+1)^r=A_0\{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}\}+A_1\{(n+1)^r-n^r\}+$$
$$+A_2\{(n+1)^{r-1}-n^{r-1}\}+$$
$$+A_3\{(n+1)^{r-2}-n^{r-2}\}+\dots+A_r \dots\dots\dots (2)$$

$(n+1)^{r+1}$ ، $(n+1)^r$ ، $(n+1)^{r-1}$، ...... را بسط داده و ضرایب قوای متشابه n را مساوی‌قرار می‌دهیم با معادل‌قرار دادن ضریب n^r داریم: $1=A_0(1+r)$ و با معادل قرار دادن ضرایب n^{r-1} داریم :

$$r=\frac{A_0(r+1)r}{2}+A_1r \quad \text{و در نتیجه} \quad A_1=\frac{1}{2}$$

بالاخره با معادل قرار ضرایب n^{r-p} و با قراردادن مقادیر A_0 ، A_1، و ضرب دو طرف معادله در :

$$\frac{p!}{r(r-1)(r-2)\dots(r-p+1)},$$

داریم:

$$1=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}+A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+$$
$$+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\dots\dots\dots (3)$$

اگر در (۱) بجای n عبارت $n-1$ را بنویسیم و تفریق کنیم:

$$n^r=A_0\{n^{r+1}-(n-1)^{r+1}\}+A_1\{n^r-(n-1)^r\}+$$
$$+A_2\{n^{r-1}-(n-1)^{r-1}\}+\dots$$

ضرایب x^{r-p} را مساوی قرار داده و مقادیر A_0،A_1 را جایگزین می کنیم

خواهیم داشت :

$$\circ=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}+A_{2}\frac{p}{r}-A_{3}\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+$$
$$+A_{4}\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4),$$

از (۳) و (۴) با جمع و تفریق داریم:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}=A_{2}\frac{p}{r}+A_{4}\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\cdots\cdots \quad (5),$$

$$\circ=A_{3}\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_{5}\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{r(r-1)(r-2)(r-3)}+\cdots\cdots \quad (6);$$

با نسبت دادن مقادیر ......و۶و۴و۲ به p ؛ از (۶) ملاحظه می‌شود که هر یك از ضرایب ......وA_{3}وA_{5}وA_{7} مساوی صفر می‌باشند و از (۵) داریم:

$$A_{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{r}{2!}\ ;\ A_{4}=-\frac{1}{30}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}\ ,$$
$$A_{6}=\frac{1}{42}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}\ ;\ \cdots\cdots$$

با قرار دادن $n=\circ$ در (۲) و $n=1$ در (۱) به ترتیب داریم:

$$1=A_{\circ}+A_{1}+A_{2}+\cdots\cdots+A_{r}$$
$$1=A_{\circ}+A_{1}+A_{2}+\cdots\cdots+A_{r}+A_{r+1},\Longrightarrow A_{r+1}=\circ,$$

در اینصورت S_n را می‌توان بشکل مناسب زیر بیان نمود :

$$S_{n}=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2}n^{r}+B_{1}\frac{r}{2!}n^{r-1}-B_{3}\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}n^{r-3}+$$
$$+B_{5}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{6!}n^{r-5}+\cdots\cdots \qquad (A)$$

که‌در آن ,$B_{1}=\frac{1}{6}$ ، $B_{3}=\frac{1}{30}$ ، $B_{5}=\frac{1}{42}$ ، $B_{7}=\frac{1}{30}$ ،

$B_{9}=\frac{5}{66}$، ...... و به اعداد برنولی مشهورند ،

مثال ۱ــ مطلوبست محاسبهٔ مجموع ,$1^{5}+2^{5}+3^{5}+\cdots\cdots+n^{5}$.

داریم:

$$S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+B_1\frac{5}{2!}n^4-B_2\frac{5\times4\times3}{4!}n^2+C,$$
$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12},$$

مثال ۲ــ محاسبهٔ مجموعهای $1^6+2^6+3^6+\dots\dots$ و $1^7+2^7+3^7+\dots\dots$

$$S_n=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42},$$
$$S_n=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12},$$

تبصره ــ با ادامه عمل در مثال ۱ بند ۲۵ می‌توان ثابت نمودکه مجموع قوای rام تمام اعداد کمتر از N اول ونسبت به آن مساوی است با :

$$S_N-a^rS_{\frac{N}{a}}-b^rS_{\frac{N}{b}}-\dots\dots+(ab)^rS_{\frac{N}{ab}}+\dots\dots \qquad (1)$$

که در آن $S_p=1^r+2^r+\dots\dots+p^r$

چون با توجه (A) بند قبل‌داریم :

$$x^rS_{\frac{N}{x}}=\frac{N^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}N^r+$$
$$+B_1\frac{r}{2!}N^{r-1}x-B_2\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}N^{r-3}x^3+\dots\dots$$

بنابراین باجایگزین کردن در(۱) ملاحظه می‌شودکه مجموع‌قوای rام اعدادکمتراز N اول و نسبت به آن مساوی است با:

$$=\frac{N^{r+1}}{r+1}\left\{1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\dots\dots+\frac{1}{ab}+\dots\dots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}N^r\left\{1-m+\frac{m(m-1)}{2!}-\dots\dots\right\}$$
$$+B_1\frac{r}{2!}N^{r-1}\{1-a-b-c-\dots\dots+ab+\dots\dots\}$$
$$-B_2\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}N^{r-3}\times$$
$$\times\{1-a^3-b^3-\dots\dots+a^3b^3+\dots\dots\}$$

که در آن m تعداد عاملهای اول موجود در N می‌باشد .

بنا براین ضریب N^r مساوی صفر می‌باشد ومجموع مطلوب می‌شود :

$$=\frac{N^{r+1}}{r+1}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+$$

$$+B_1\frac{r}{2!}N^{r-1}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots$$

$$-B_2\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}N^{r-3}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots\cdots$$

بازاء $r=2$ ؛ $B_1\frac{r}{2!}=\frac{1}{6}$

، $r=3$ ؛ $B_1\frac{r}{2!}=\frac{1}{4}$ و چون $\Sigma n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$

در S_3 جمله‌ای که شامل B_2 باشد وجود ندارد .

بازاء $r=4$ ؛ $B_1\frac{r}{2!}=\frac{1}{3}$ و $B_2\frac{r(r-1)(r-2)}{4!}=\frac{1}{30}$ و

با جایگزین کردن این مقادیر مجموع قوای چهارم این اعداد بدست می‌آید:

$$\frac{N^5}{5}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+$$

$$+\frac{N^3}{3}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots$$

$$-\frac{N}{30}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots\cdots$$

۲۷ـ اگر $d_1(=1),d_2,d_3,\cdots\cdots,d_r(=n)$ **مقسوم‌علیه‌های عدد** N **باشند در این صورت :**

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\varphi(d_3)+\cdots\cdots+\varphi(d_r)=N.$$

فرض کنیم $N=p^a.q^b.r^c\cdots\cdots$ ‏(p،q،r،…… اعداد اولند) و

$$S=\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\cdots\cdots+\varphi(d_r),$$

چون هر مقسوم علیه N بصورت $p^x q^y r^z \cdots\cdots$ که در آن $0\leqslant x\leqslant a$ ، $0\leqslant y\leqslant b$ ، $0\leqslant z\leqslant c$ ، …… می‌باشد . پس :

$$S=\Sigma\varphi(p^x q^y r^z \ldots\ldots)=\Sigma\{\varphi(p^x)\varphi(q^y)\varphi(r^z)\ldots\ldots\},$$

که درآن x، y، z، ...... دارای تمام مقادیر صادق درشرایط فوق می‌باشد .

$$\therefore\quad S=[1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots\ldots+\varphi(p^a)][1+$$
$$+\varphi(q)+\ldots\ldots+\varphi(q^b)][1+\varphi(r)+\ldots\ldots+\varphi(r^c)\ldots\ldots$$

وچون

$$1+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots\ldots+\varphi(p^a)=1+(p-1)+$$
$$+(p^2-p)+\ldots\ldots+(p^a-p^{a-1})=p^a$$

به‌طریق مشابه برای هرکروشه ، خواهیم داشت :

$$S=p^a\cdot q^b\cdot r^c\ldots\ldots=N.$$

۲۸ـ [قضیهٔ ویلسون] اگر p عدد اول باشد $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است .

چون اگر a یکی از اعداد $1\,;\,2\,;\,3\,;\ldots\ldots;\,p-1$ باشد و اگر حاصلضرب‌های $1a,2a,3a,\ldots\ldots,(p-1)a$ را بر p تقسیم‌کنیم باقیمانده‌ها اعداد : $1,2,3,\ldots\ldots,p-1$ با همین ترتیب و یا ترتیب دیگری می‌باشند از آنجا برای هر a عدد منحصر بـفرد دیگری مانند a' وجود دارد که:

$$aa'\equiv 1(\mathrm{mod}\,p).$$

اگر $a'=a$, باشدباید a^2-1 برم p بخش‌پذیر باشد وچون p عدداول و بزرگتر از a می‌باشد نتیجه می‌شود که $a+1=p$, یـا $a-1=0$, بنابراین ۱ و $p-1$ تنها مقادیری از a می‌باشندکه بازاء آن a' مساوی a می‌شود این دومقدار را کنار می‌گذاریم و $p-3$ مقدار باقی می‌ماند .

اکنون اگر a مساوی هریك از $p-3$ عدد $2,3,\ldots\ldots,p-2$ باشد a' مساوی a نیست . در نتیجه این اعداد را می‌توان بصورت $\frac{1}{2}(p-3)$ زوج مرتب‌کردبطوریکه حاصلضرب هرزوج با عددیك ودرنتیجه حاصلضرب تمام زوجها و عدد یك] همنهشت باشند پس :

$$2\times 3\times\ldots\ldots(p-2)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$$

$$\therefore\ (p-1)!\equiv p-1(\mathrm{mod}\,p).\Longrightarrow(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

توجه ـ اعداد a، a' **باقیمانده‌های هم‌بسته** گویند وهر کدام ازآنها **وابسته** به دیگری است . (اولر)

نتیجه : اگر $۲p+۱$ عدد اول باشد $(-۱)^{p}+(p!)^{۲}$ بر $۲p+۱$ بخش‌پذیر است .

چون باتوجه به‌قضیهٔ ویلسون $(۲p)!+۱$ بر $۲p+۱$ بخش‌پذیراست.
فرض می‌کنیم $n=۲p+۱$ پس $p+۱=n-p$ و ازآنجا :

$$(۲p)!=۱\cdot۲\cdot۳\cdot۴\cdots p(p+۱)(p+۲)\cdots(n-۱).$$
$$=۱(n-۱)۲(n-۲)۳(n-۳)\cdots p(n-p).$$
$$=(\text{مضرب }n)+(-۱)^{p}(p!)^{۲}.$$

بنابراین $(-۱)^{p}(p!)^{۲}+۱$ بر n یا $۲p+۱$ بخش‌پذیر است ودرنتیجه $(-۱)^{p}+(p!)^{۲}$ بر $۲p+۱$ بخش‌پذیر است .

مثال ـ ثابت‌کنید $(۲۸)!+۲۳۳$ بر ۸۹۹ بخش‌پذیر است .

داریم: $۸۹۹=۲۹\times۳۱$ و $۲۳۳\equiv۱(\mathrm{mod}\,۲۹)$ و $۲۳۳\equiv۱۶(\mathrm{mod}\,۳۱)$
با توجه به قضیهٔ ویلسون $(۲۸!)+۱\equiv\circ(\mathrm{mod}\,۲۹)$ و پس
$۲۸!+۲۳۳\equiv\circ(\mathrm{mod}\,۲۹)$ وهمچنین با اساس ۳۱داریم $(۳\circ)!+۱\equiv\circ$
بنابراین $۳\circ\times۲۹(۲۸!)+۱\equiv\circ$ ویا $(-۱)(-۲)(۲۸!)+۳۲\equiv\circ$
و چون ۲ و۳۱ نسبت بهم اولندنتیجه می‌شودکه $۲۸!+۱۶\equiv\circ$ وبنابراین
$۲۸!+۲۳۳\equiv\circ$ و ازآنجا $۲۸!+۲۳۳$ بر ۲۹ و ۳۱ بخش‌پذیراست .

۲۹ـ همنهشتیها دارای خواصی مشابه معادلات می‌باشند . مثلا اگر همنهشت:

$$ax^{۲}+bx+c\equiv\circ(\mathrm{mod}\,p)\qquad(a,b,c,\in Z,)\quad -(A)$$

بازاء سه مقدار α،β،γ از x برقرارباشد بطوریکه تفاضل‌های $\alpha-\beta$ و $\beta-\gamma$ و $\gamma-\alpha$ عدد یك و یا نسبت به p اول باشندهمنهشتی مزبوربازاء جمیع مقادیر x برقرار و a،b،c مضرب p می‌باشند .

چون بنا بفرض داریم. $a\alpha^{۲}+b\alpha+c\equiv\circ(\mathrm{mod}\,p).$

$$a\beta^{۲}+b\beta+c\equiv\circ(\mathrm{mod}\,q).$$

$$\therefore(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}\equiv\circ(\mathrm{mod}\,p).$$

چون $\alpha-\beta$ واحد و یا نسبت به p اول می‌باشد پس :

$$a(\alpha-\beta)+b\equiv 0 \pmod p.$$

و بطریق مشابه $$a(\alpha+\gamma)+b\equiv 0 \pmod p.$$

با تفریق دومعادله :

$$a(\beta-\gamma)\equiv 0 \pmod p. \quad \therefore$$

چون $\beta-\gamma$ واحد و یا نسبت به p اول است پس $a\equiv 0 \pmod p$ و درنتیجه $b\equiv 0 \pmod p$ و بالاخره $c\equiv 0 \pmod p$.

و چون a ، b ، c همگی مضرب p می‌باشند نتیجه می‌شود که ax^2+bx+c بازاء جمیع مقادیر x مضرب p است . و قضیه را می‌توان بصورت کلی تعمیم داد :

اگر یك همنهشت درجهٔ n برحسب x بازاء بیش از n مقدار از x برقرار باشد بطوریکه تفاضل بین هردومقدار واحد و یا اول بااساس باشد. همنهشت بازاء جمیع مقادیر x برقرار بوده وتمام ضرایب قوای مختلف x مضرب اساس می‌باشند .

(B) ـ همنهشت زیر را درنظر می‌گیریم :

$$f(x)\equiv 0 \pmod p, \qquad f(x)=ax^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_n \dots\dots (1)$$

که درآن p عددیست اول .

این همنهشت معادل با همنهشتی‌است که درجهٔ آن بیشتراز $p-1$ نیست.

چون با تقسیم $f(x)$ بر x^p-x داریم:

$$f(x)=(x^p-x)Q(x)+R(x).$$

درجهٔ $R(x)$ کمتراز $p-1$ می‌باشد وبعلاوه چون $x^p-x\equiv 0 \pmod p$ پس $f(x)\equiv R(x) \pmod p$

۳۰ـ قضیهٔ لاگرانژ[1] : اگر p عدداولی باشد مجموع تمام‌حاصل‌ضرب‌های r به r اعداد $1,2,3,\dots\dots p-1$ بر p بخش‌پذیراست‌که در آن r عددیست صحیح وکمتراز $p-1$.

۱ـ ژوزف لوئی لاگرانژ ریاضی‌دان فرانسوی (۱۸۱۳-۱۷۳۶)

چون همنهشتی

$$(x-1)(x-2)\cdots\{x-(p-1)\}-x^{p-1}+1\equiv 0 \pmod p$$

از درجه $p-2$ برحسب x می‌باشد و با توجه به قضیه فرما بازاء $p-1$ مقدار از x بر قرار و شرایط بند ۲۷ نیز صادق می‌باشد پس :

تمام ضرایب قوای مختلف x مضربی از p می‌باشند .

توجه ـ اگر در این رابطه $x=0$ باشد قضیهٔ ویلسون فوراً نتیجه می‌شود .

مثال ۱ـ اگر p عدد اول بزرگتر از ۳ باشد ثابت‌کنید :

اولاً ـ $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)(p-1)!\equiv 0 \pmod{p^2}$.

ثانیاً ـ $(mp)!-m!(p!)^m\equiv 0 \pmod{p^{m+3}}$,

اولاً ـ اگر در اتحاد :

$$f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)\equiv$$
$$\equiv x^{p-1}+a_1x^{p-2}+a_2x^{p-3}+\cdots+a_{p-1}$$

مقدار x را مساوی p و $-2p$ فرض‌کنیم داریم:

$$(p+1)(p+2)\cdots(2p-1)=$$
$$=a_{p-1}+a_{p-2}\cdot p+a_{p-3}\cdot p^2+\cdots+p^{p-1}$$
$$(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)=$$
$$=a_{p-1}-a_{p-2}\cdot 2p+a_{p-3}\cdot 4p^2+\cdots+(2p)^{p-1};$$

با تفریق داریم:

$$3p\cdot a_{p-2}-3p^2\cdot a_{p-3}+9p^3\cdot a_{p-4}-\cdots-(2^{p-1}-1)p^{p-1}=0$$

و چون p عدد اول بزرگتر ۳ می‌باشد a_{p-3} وجود دارد و با توجه به قضیهٔ لاگرانژ بر p بخش‌پذیر است . پس $3p\cdot a_{p-2}$ بر p^3 بخش‌پذیر است . و چون ۳ نسبت به p اول است پس‌نتیجه می‌شود که a_{p-2} بر p^2 بخش‌پذیراست.

ثانیاً ـ اگر در $f(x)$ مقدار rp را بجای x قرار دهیم مانند اولاً داریم:

$$(rp+1)(rp+2)\cdots(rp+p-1)\equiv a_{p-1} \pmod{p^3},$$

که در آن $r=1,2,3,\cdots,m-1$

از آنجا: $(r+1)p!/[(rp)!p!]\equiv r+1 \pmod{p^3};$

با دادن مقادیر $1,2,3,\ldots,m-1$ به r داریم:

$$(mp)!/(p!)^m\equiv m!\pmod{p^3};$$

$$(mp)!-m!(p!)^m\equiv 0\pmod{p^{m+3}}.$$

تمرین

۱ـ ثابت کنید $18!+1$ بر ۴۷۳ بخش‌پذیر است.

۲ـ اگر n عدد فردی باشد، ثابت کنید:

$$(n-1)!\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right]\equiv 0\pmod{n}.$$

۳ـ اگر q،p اعداد صحیح باشند ثابت کنید $(pq)!$ بر $(p!)^q.q!$ و $(q!)^p.p!$ بخش‌پذیر است.

۴ـ اگر n عدد اول و $r<n$ در این صورت:

$$(r-1)!(n-r)!+(-1)^{r-1}=M(n)$$

۵ـ اگر d_1،d_2،d_3،...... مقسوم علیه‌های عدد N باشند ثابت کنید:

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\varphi(d_3)+\cdots=N;$$

و نشان دهید که:

$$\varphi(1)\frac{x}{1+x^2}-\varphi(3)\frac{x^3}{1+x^6}+\varphi(5)\frac{x^5}{1+x^{10}}-\cdots=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

۳۱ـ همنهشتیهای خطی.

بحث ما در این مبحث دربارهٔ همنهشتی:

$$ax\equiv b\pmod{m}, \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

می‌باشد. رابطه (۱) که در آن x به عنوان یك مجهول در نظر گرفته می‌شود **همنهشتی خطی** نامیده می‌شود. هرعدد صحیح که در معادلهٔ (۱) صدق کند **جواب و یا ریشهٔ** همنهشتی خطی نامیده می‌شود. اگر x_0 یك جواب (۱) باشد بازاء هر عدد صحیح k داریم:

$$a(x_0+km)\equiv ax_0\equiv b\pmod{m}.$$

بنا براین تمام اعداد صحیح همنهشت با x_0 با اساس m درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کنند ودر نتیجه معادلهٔ (۱) دارای یك جواب $x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m)$ می‌باشد تعداد جوابهای مختلف معادلهٔ (۱) را تعداد جوابهای غیرهمنهشت با اساس m تعریف می‌کنند یعنی تعداد اعداد صحیحی که درمجموعه باقیمانده‌های کامل با اساس m جواب معادله (۱) می‌باشند .

مثال ۱ـ همنهشتی خطی $۲x \equiv ۱ (\mathrm{mod}\, ۷)$ را درنظر می‌گیریم:

مجموعهٔ باقیمانده‌های کامل $(\mathrm{mod}\, ۷)$ عبارتند از $۰,۱,۲;۳;۴;۵;۶$ و با امتحان این مقادیر صحیح ملاحظه می‌شود که تنها مقداری که معادله فوق را برقرار می‌سازد ۴ می‌باشد. پس همنهشتی خط فوق فقط دارای جواب $x \equiv ۴ (\mathrm{mod}\, ۷)$ می‌باشد .

قضیهٔ ۱ـ شرط لازم و کافی برای اینکه همنهشتی خطی :

$$ax \equiv b (\mathrm{mod}\, m), \qquad (۱)$$

دارای جواب باشد این است که $(a,m) | b$ و دراین‌صورت معادلهٔ (۱) دارای (a,m) جواب غیرهمنهشت با اساس m می‌باشد .

فرض می‌کنیم $d=(a,m)$ و $a=da_۱$ ، $m=dm_۱$ پس :

$$(a_۱,m_۱)=۱$$

اولاً ـ اگر معادله (۱) دارای جواب باشد در اینصورت اعداد صحیح x_0 و k طوری وجود دارند که $b=ax_0-km=d(a_۱x_0-km_۱)$ بنابراین $d|b$.

ثانیاً ـ برعکس فرض کنیم $d|b$ در این صورت عدد صحیح $b_۱$ طوری وجود دارد که $b=db_۱$ و همنهشتی خطی (۱) به صورت :

$$da_۱x \equiv db_۱ \{\mathrm{mod}(dm_۱)\}$$

در می‌آید در نتیجه (۱) درصورتی جواب دارد که :

$$a_۱x \equiv b_۱ (\mathrm{mod}\, m_۱) \qquad (۲)$$

دارای جواب باشد و چون $(a_۱,m_۱)=۱$ اعداد صحیح .

$$۰, a_۱, ۲a_۱, \ldots, (m_۱-۱)a_۱ \qquad (۳)$$

با توجه به مثال بند ۲۰ مجموعه کامل باقیمانده بااساس m_1 می‌باشند . ازآنجا فقط یك عدد صحیح درمجموعه (۳) وجود دارد که همنهشت با $b_1 (\mathrm{mod}\, m_1)$ می‌باشد . یعنی فقط یك عدد x_0 $(0 \leqq x_0 \leqq m-1)$ طوری وجود دارد که $a_1 x_0 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m_1)$ بنابراین اگر $d|b$ معادله (۲) دارای جواب x_0 و بنابراین معادله (۱) دارای جواب x_0 می‌باشد .

ازقسمت‌های اولاً و ثانیاً نتیجه شدکه معادله (۱) فقط و فقط اگر $d|b$ باشد دارای جواب است .

حال فرض می‌کنیم‌که معادله (۱) دارای جواب x_0 باشد پس :

$$a(x-x_0) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$$

و بنابراین $x-x_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_1)$ و درنتیجه $x = x_0 + tm_1$ ولی :

$$x_0 + (t+kd)m_1 = x_0 + tm_1 + km \equiv x_0 + tm_1 (\mathrm{mod}\, m).$$

و همچنین برای دو عدد t_1, t_2 از مجموعه $0, 1, \ldots\ldots d-1$ به سهولت دیده می‌شودکه $x_0 + t_1 m \not\equiv x_0 + t_2 m (\mathrm{mod}\, m)$ بنابراین‌معادله (۱) تماماً دارای $d = (a,m)$ جواب غیرهمنهشت با اساس m می‌باشد که از رابطه $x_0 + tm_1$ بازاء $(t = 0, 1, \ldots\ldots d-1)$ بدست می‌آیند .

نتیجه ـ اگر $(a,m) = 1$ باشد بنابراین همنهشتی خطی : $ax \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ کلاً دارای یك جواب $x_0 (\mathrm{mod}\, m)$ می‌باشد .

در این حال از قضیهٔ اولر $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$ داریم:

$$ax_0 \equiv ba^{\varphi(m)} (\mathrm{mod}\, m)$$

و از آنجا بازاء $(a,m) = 1$ داریم:

$$x_0 \equiv ba^{\varphi(m)-1} (\mathrm{mod}\, m).$$

مثال ـ جوابهای‌همنهشتی‌خطی $6x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 21)$ رابدست‌آورید:

در این جا $a = 6$ ، $b = 3$ ، $m = 21$ و $(a,m) = 3$ می‌باشد .

پس همنهشتی خطی دارای سه جواب می‌باشد . که عبارتند از :

$$x \equiv x_0,\ x_0 + 1 \times 7,\ x_0 + 2 \times 7 (\mathrm{mod}\, 21)$$

که درآن x_0 جواب یکتامعادله $2x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$ و همانطوریکه قبلاً تعیین کردیم $x_0 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$ می‌باشد . و از آنجا ریشه‌ها عبارتند از :

$$x\equiv 4,11,18 \pmod{21},$$

توجه ـ برای معادلهٔ $2x\equiv 1 \pmod{7}$ داریم $ba^{\varphi(m)-1}$ و یا

$$x_0=2^5\equiv 4 \pmod{7}$$

در بعضی ازکاربرد همنهشتی‌ها الزاماً باید جواب مشترك يك دستگاه همنهشتی را بدست آورد . حالت کلی آن توسط قضیهٔ زیر که به **قضیهٔ مانده‌های چینی** معروف است بیان می‌شود ، راه حل حالات خاص آن را چینیان قدیم میدانستند .

قضیهٔ ۲ـ اگر اعداد صحیح و مثبت $m_i(i=1,2,\ldots r)$ نسبت‌به هم دو بدو اول و a_i اعدادصحیح مفروض‌باشند، دراین‌صورت r همنهشتی:

$$x\equiv a_i \pmod{m_i},\quad (i=1,2,\ldots r) \text{------------}(1)$$

دارای يك جواب مشترك باساس $m_1m_2m_3\ldots m_r$ است‌که‌یکتامی‌باشد .

فرض می کنیم $m=m_1m_2\ldots m_r$ و می‌نویسیم $m=m_iM_i$ پس برای هر $i=1,2,\ldots r$ داریم $(m_i,M_i)=1$ و با توجه به نتیجهٔ قضیهٔ قبل $y_i(i=1,2,3,\ldots r)$ عدد صحیح طوری می‌توان یافت‌که :

$$M_iy_i\equiv 1 \pmod{m_i}.\quad (i=1,2,\ldots r)\text{..........}(2)$$

از آنجا اگر $x_i=M_iy_i$ باشد در این صورت $x_i\equiv 1 \pmod{m_i}$ و $x_i\equiv 0 \pmod{M_i}$. ازهمنهشتی‌اخیر نتیجه‌می‌شود که $x_i\equiv 0 \pmod{m_j}$ که درآن $j\neq i(i=1,2,3,\ldots r)$ حال‌عددصحیح زیر را درنظر می گیریم:

$$Z=\sum_{i=1}^{r} a_ix_i=\sum_{i=1}^{r} a_iM_iy_i,$$

$$Z\equiv a_ix_i \pmod{m_i}\equiv a_i \pmod{m_i},\quad i=1,2,3,\ldots$$

بنابراین Z يك جواب مشترك دستگاه همنهشتی (۱) می باشد .

همچنین اگر x هر جواب مشترك باشد پس :

$$x\equiv Z\equiv a_i \pmod{m_i}\qquad (i=1,2,\ldots r)$$

و ازآنجا: $x\equiv Z \pmod{m_1m_2m_3\ldots m_r}$ و این ثابت می کند که جواب مشترك Z با اساس $m_1m_2\ldots m_r$ یکتا می‌باشد .

مثال ۱ـ مطلوبست حل دستگاه همنهشتی :

$$x \equiv a_1 (\bmod 4), \quad x \equiv a_2 (\bmod 5), \quad x \equiv a_3 (\bmod 7).$$

حل ـ در این جا: $4 \times 5 \times 7 = 35 \times 4 = 28 \times 5 = 20 \times 7$

$$35 \times 3 \equiv 1 (\bmod 4), \quad 28 \times 2 \equiv 1 (\bmod 5), \quad 20 \times 6 \equiv 1 (\bmod 7).$$

و از آنجا:

$$x_0 = 35 \times 3a_1 + 28 \times 2a_2 + 20 \times 6a_3 = \\ = 105a_1 + 56a_2 + 120a_3$$

$$\therefore \quad x \equiv 105a_1 + 56a_2 + 120a_3 (\bmod 140)$$

که بازاء $a_1 = 1$ ، $a_2 = 3$ ، $a_3 = 2$ جواب $x \equiv 27 (\bmod 140)$ راخواهیم داشت .

مثال ۲ـ مطلوبست تعیین عددچهار رقمی x بطوریکه باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۲۵،۱۱،۹،۵،۴ به ترتیب برابر ۱۴،۱،۵،۴،۱ باشد .

(امتحان نهایی ششم)

حل ـ در این جا:

$$x \equiv 1 (\bmod 4), \quad x \equiv 4 (\bmod 5), \quad x \equiv 5 (\bmod 9)$$

$$x \equiv 1 (\bmod 11), \quad x \equiv 14 (\bmod 25),$$

$$4 \times 25 \times 9 \times 11 = 4 \times 2475 = 25 \times 396 = \\ = 9 \times 1100 = 11 \times 900$$

و چون :

$$2475 \times 3 \equiv 1 (\bmod 4), \quad 396 \times 6 \equiv 1 (\bmod 25),$$

$$1100 \times 5 \equiv 1 (\bmod 9), \quad 900 \times 5 \equiv 1 (\bmod 11).$$

پس :

$$x_0 = 2475 \times 3 + 396 \times 6 \times 14 + \\ + 1100 \times 5 \times 5 + 900 \times 5$$

$$x_0 = 7425 + 33264 + 27500 + 4500$$

$$x_0 = 72689$$

$\therefore \quad x \equiv ۷۲۶۸۹ (\mathrm{mod}\, ۹۹۰۰)$

$$x \equiv ۳۳۸۹ (\mathrm{mod}\, ۹۹۰۰) \Longrightarrow x = ۳۳۸۹$$

۳۲ـ همنهشتی از هر درجه‌ای با اساس اعداد مرکب

A ـ اگر $m_1, m_2, \ldots, m_k$ اعدادی باشند که نسبت بهم اولند همنهشتی:

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \ldots m_k), \ldots\ldots (1)$$

معادل با دستگاه :

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_1)$$

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_2), \qquad f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_k),$$

می‌باشد . اگر تعداد جوابهای همنهشتی‌های متناظـر با اساس‌ها را $T_1, T_2, \ldots T_k$ و تعداد جوابهای همنهشتی (۱) را T بنامیم داریم:

$$T = T_1 T_2 \ldots T_k$$

قسمت اول را با استفاده از قضیهٔ زیر فوراً می‌توان نتیجه گرفت .

قضیه ـ اگر همنهشتی $a \equiv b$ بازاء چند اساس مختلف برقرار باشد، بازاء اساسی مساوی با کوچکترین مضرب مشترك اساس‌ها نیز برقراراست و برعکس ـ که اثبات آنرا به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (بند ۳۴) .

برای اثبات قسمت دوم همنهشتی

$$f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m_s), \ldots\ldots (2)$$

را در نظر می‌گیریم و شرط لازم و کافی برای اینکه این همنهشتی دارای جواب باشد این است که یکی از T_s همنهشتی :

$$x \equiv b_s (\mathrm{mod}\, m_s)$$

دارای جواب باشد که در آن b_s دسته کامل باقیمانده‌های جواب همنهشتی (۲) می‌باشد . بعلاوه $T_1 T_2 \ldots T_k$ ترکیب مختلف به فرم:

$$x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m_1), \quad x \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, m_2), \ldots\ldots x \equiv b_k (\mathrm{mod}\, m_k)$$

متعلق به طبقات مختلف با اساس $m_1 m_2 \ldots m_k$ وجود دارد .

مثال ۱ـ همنهشتی $f(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, ۳۵)$ معادل بادستگاه زیر می‌باشد:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{5}, \qquad f(x)\equiv 0 \pmod{7};$$
$$f(x)=x^4+2x^3+8x+9;$$

حل- همنهشتی اول دارای دوجواب $x\equiv 1,4 \pmod{5}$ وهمنهشتی دوم دارای سه جواب $x\equiv 3;5;6$ می‌باشد .

در نتیجه همنهشتی اصلی دارای ۶ جواب می‌باشد حال باید دستگاه :

$$x\equiv b_1 \pmod{5}, \qquad x\equiv b_2 \pmod{7}, \quad \text{.................} (1)$$

که درآن $b_1=1;4$ و $b_2=3;5;6$ می‌باشد حل کنیم. اما چون :

$$35=7\times 5=5\times 7 \quad 7\times 3\equiv 1 \pmod{5}, \ 5\times 3\equiv 1 \pmod{7}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر x صادق در (۱) را می‌توان بفرم:

$$x\equiv 21b_1+15b_2 \pmod{35}$$

نوشت. درنتیجه جوابهای همنهشتی عبارتند از:

$$x\equiv 31;26;6;24;19;34 \pmod{35}.$$

B - با توجه به A حل و بحث همنهشتی:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}}$$

به حل وبحث همنهشتی:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p^{\alpha}} \quad \text{..............................} (3)$$

بدل می‌شود و اکنون ثابت می‌کنیم که همنهشتی اخیر را درحالت کلی می‌توان به همنهشتی زیر تبدیل نمود :

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p}. \quad \text{..............................} (4)$$

درحقیقت هر x صادق در (۳) الزاماً در (۴) صدق می‌کند چون اگر فرض کنیم:

$$x\equiv x_1 \pmod{p}.$$

یك جواب همنهشتی (۴) باشد ، داریم: $x=x_1+pt_1$ با قراردادن این مقدار از x در همنهشتی :

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p^2},$$

و بسط $f(x)$ برحسب سری تیلر با توجه به اینکه $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_1)$ یك عدد

صحیح است و با حذف جملاتی که مضرب p^2 می‌باشند داریم:

$$f(x_1)+pt_1f'(x_1)\equiv 0 \pmod{p^2},$$
$$f(x_1)/p+t_1f'(x_1)\equiv 0 \pmod{p},$$

بحث را به حالتی محدودمی کنیم که $f'(x_1)$ مضربی از p نباشد. دراین‌صورت همنهشتی اخیر دارای یك جواب:

$$t_1\equiv t'_1 \pmod{p}; \qquad t_1=t'_1+pt_2,$$

می‌باشد و ازآنجا x را می‌توان بفرم زیر بیان‌نمود:

$$x=x_1+pt'_1+p^2t_2=x_2+p^2t_2,$$

و با قرار دادن این مقدار در همنهشتی:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p^3}.$$

خواهیم داشت:

$$f(x_2)+p^2t_2f'(x_2)\equiv 0 \pmod{p^3},$$
$$f(x_2)/p^2+t_2f'(x_2)\equiv 0 \pmod{p}. \quad\text{.........................}(5)$$

در این‌جا $f'(x_2)$ بر p بخش‌پذیر نیست چون:

$$x_2\equiv x_1 \pmod{p},$$
$$f'(x_2)\equiv f'(x_1) \pmod{p},$$

و بنابراین همنهشتی (۵) دارای جواب یکتا:

$$t_2\equiv t'_2 \pmod{p};$$
$$t_2\equiv t'_2+pt_3,$$

و از آنجا x را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$x=x_2+p^2t'_2+p^3t_3=x_3+p^3t_3.$$

اگر عمل را بهمین ترتیب ادامه دهیم‌بالاخره یك جواب همنهشتی (۳) را بدست می‌آوریم که همنهشت‌با جواب همنهشتی (۴) می‌باشد. و ازآنجا هر جواب $x\equiv x_1 \pmod{p}$ ازهمنهشتی (۴) مشروط براینکه $f'(x_1)$ مضربی از p نباشد یك جواب همنهشتی (۳) را می‌دهدکه مساویست‌با:

$$x=x_\alpha+p^\alpha t_\alpha.$$
$$x\equiv x_\alpha \pmod{p^\alpha}.$$

مثال ۱ــ همنهشتی زیر را حل کنید:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{27},$$

$$f(x)=x^4+7x+4; \quad \text{..........} \quad (1)$$

با امتحان باقیمانده‌های ۳ در همنهشتی $f(x)\equiv 0 \pmod 3$ جواب : $x\equiv 1 \pmod 3$ را بدست می‌آوریم که‌در آن $f'(1)\equiv 2 \pmod 3$ و در نتیجه بر ۳ بخش‌پذیر نیست پس:

$$x=1+3t_1$$

$$f(1)+3t_1f'(1)\equiv 0 \pmod 9, \qquad 3+3t_1\times 2\equiv 0 \pmod 9.$$

$$2t_1+1\equiv 0 \pmod 3, \quad t_1\equiv 1 \pmod 3, \quad t_1=1+3t_2,$$

$$x=4+9t_2,$$

$$f(4)+9t_2f'(4)\equiv 0 \pmod{27}, \qquad 18+9t_2\times 2\equiv 0 \pmod{27},$$

$$2t_2+2\equiv 0 \pmod 3, \quad t_2\equiv 2 \pmod 3, \quad t_2=2+3t_3;$$

$$x=22+27t_3$$

بنابراین همنهشتی (۱) دارای جواب $x\equiv 22 \pmod{27}$ می‌باشد .

مثال ۲ــ حل همنهشتی

$$f(x)=x^3+x-19\equiv 0 \pmod{7^2},$$

ابتدا همنهشتی $x^3+x-19\equiv 0 \pmod 7$, را در نظر می‌گیریم با امتحان دستهٔ کامل باقیمانده‌های $0, \pm1, \pm2, \pm3$, با اساس ۷ نتیجه می‌شود که $x\equiv -1, -3 \pmod 7$, دو ریشهٔ این همنهشتی می‌باشد وچون $f'(-1)=4\not\equiv 0 \pmod 7$ و $f(-1)=7(-3)$ و $4t-3\equiv 0 \pmod 7$ دارای جواب $t\equiv -1 \pmod 7$ می‌باشد بنابراین $x\equiv -8 \pmod{7^2}$ ریشهٔ معادلهٔ اصلی متناظر با ریشهٔ $x\equiv -1 \pmod 7$ از معادلهٔ دوم می‌باشد . همچنین $f'(-3)\equiv 0 \pmod 7$ و $f(-3)\equiv 0 \pmod{7^2}$ بنابراین ۷ ریشه برای معادلهٔ اول وجود دارند که متناظر با ریشهٔ $x\equiv -3 \pmod 7$ می‌باشند این ریشه‌ها از $x\equiv -3+7t \pmod{7^2}$ بازاء $t=1, 2, \ldots, 7$ حاصل‌می‌شوند که‌عبارتنداز:

$$x\equiv 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 \pmod{7^2}$$

مثال ۳ـ مطلوبست حل همنهشتی:

$$f(x)=x^{3}+3x+1\equiv 0 \pmod{75=3\times 5^{2}} \quad (1)$$

دراین مثال باید همنهشتی‌های زیر را حل کنیم:

$$x^{3}+3x+1\equiv 0 \pmod{3} \quad (2)$$

$$x^{3}+3x+1\equiv 0 \pmod{5^{2}} \quad (3)$$

به آسانی ملاحظه می‌شود که (۲) فقط و فقط دارای ریشه $x\equiv 2 \pmod{3}$ می‌باشد.

برای حل (۳) ابتدا باید

$$x^{3}+3x+1\equiv 0 \pmod{5} \quad (4)$$

را حل کنیم، این همنهشتی دارای دو ریشهٔ $x\equiv 1,2 \pmod{5}$ می‌باشد.

چون $f'(1)=6\not\equiv 0 \pmod{5}$ ، $f(1)=5$ و $6t+1\equiv 0 \pmod{5}$ دارای جواب یکتای $t\equiv -1 \pmod{5}$ می‌باشد پس نتیجه می‌شود که: $x\equiv -4 \pmod{5^{2}}$ ریشهٔ (۳) متناظر با ریشهٔ $x\equiv 1 \pmod{5}$ از (۴) می‌باشد.

همچنین $f'(2)\equiv 0 \pmod{5}$ و $f(2)\not\equiv 0 \pmod{5^{2}}$ در نتیجه ریشه‌ای برای (۳) متناظر با ریشه $x\equiv 2 \pmod{5}$ از (۴) را نداریم.

حال باید دستگاه:

$$x\equiv 2 \pmod{3}, \qquad x\equiv -4 \pmod{5^{2}}.$$

را حل کنیم، که باتوجه به‌بند ۲۹ دارای‌جواب $x\equiv -4 \pmod{75}$ می‌باشد.

۳۳ـ همنهشتی‌های جبری

دراین‌بخش $f(x),\varphi(x),\ldots$ چندجمله‌ای‌های باضرایب صحیح‌می‌باشند.

(۱)ـ اگر هرضریب $f(x)$ بر p بخش‌پذیر باشد دراین صورت $f(x)$ طبق بند ۲۷ بازاء جمیع مقادیر x بر p بخش‌پذیر است دراین حال $f(x)$ را همنهشتی متحد با صفر با اساس p گوئیم و آنرا چنین نمایش می‌دهیم:

$$f(x)\equiv 0 \pmod{p}.$$

بطورکلی $f(x)$ را همنهشتی متحد با $\varphi(x) \pmod{p}$ نامند اگر $f(x)-\varphi(x)\equiv 0 \pmod{p}$ باشد و آنرا بصورت زیر می‌نویسند:

$$f(x)\equiv\varphi(x)(\bmod p).$$

(۲) **تقسیم با اساس p** ـ اگر $f(x)$ بر $\varphi(x)$ چند جمله‌ای با درجه پایین‌تر تقسیم شود اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$f(x)=Q'(x)\cdot\varphi(x)+R'(x).$$

که درآن $R'(x)$ باقیمانده و با درجه‌ای کمتر از $\varphi(x)$ می‌باشد .

فرض می‌کنیم هرضریب دراین‌تقسیم به عددی همنهشت بااساس p تبدیل شود، عمل ساده‌کردن با این‌طریق، **تقسیم بااساس p** نامیده می‌شود و دراین صورت اتحاد زیر را داریم:

$$f(x)\equiv Q(x)\cdot\varphi(x)+R(x)(\bmod p)$$

که در آن $R(x)$ دارای درجه‌ای کمتر از $\varphi(x)$ می‌باشد .

اگر $R(x)\equiv 0(\bmod p)$ دراین‌صورت $f(x)$ را **بخش‌پذیر با اساس p** بر $\varphi(x)$ نامند .

اگر $f(x)$ بخش‌پذیر با اساس p بر $(x-\alpha)^r$ باشد همنهشتی $f(x)\equiv 0(\bmod p)$ را **با r ریشه مساوی با α** گوییم.

مثال ۱ـ ثابت‌کنید که ۶،۴،۲ ریشه‌های :

$5x^3+3x^2-4x-2\equiv 0(\bmod 7)$ می‌باشند .

تقسیم با اساس ۷ بر $x-2$ و $x-4$ فقط با نوشتن ضرایب قوای x در زیر نشان داده شده است :

$$\begin{array}{c|l} 1-2 & 5+3-4-2 \\ & \quad +10-2+2 \\ \cline{2-2} 1-4 & 5-1+1+0 \\ & \quad\ 20+20 \\ \cline{2-2} & 5+5+0 \end{array}$$

در خط سوم ۱۳ به ۱ــ و ۶ــ به ۱+ تبدیل شده است . در سطر آخرهم ۱۹ به ۵ و ۲۱ به صفر بدل شده است . و نتیجه می‌گیریم که :

$$5x^3+3x^2-4x-2\equiv 5(x-2)(x-4)(x+1)(\bmod 7),$$

بنابراین همنهشتی بازاء $x=2,4,6$ برقرار است .

۳۴ـ همنهشتی‌های جبری با اساس عدد اول p .

(۱)ـ اگر, $MN\equiv 0 \pmod p$ دراین‌صورت یا $M\equiv 0 \pmod p$ و یا $N\equiv 0 \pmod p$

چون MN بر p بخش‌پذیراست پس یا M ویا N برآن بخش‌پذیراست.

(۲)ـ اگر α یك ریشه $f(x)\equiv 0 \pmod p$ باشد در این صورت $f(x)$ بر $x-\alpha$ با اساس p بخش‌پذیر است .

چون با تقسیم با اساس p داریم: $f(x)\equiv Q(x)\cdot(x-\alpha)+R,$ که درآن R مستقل از x می‌باشد . باگذاردن $x=\alpha$ داریم:

$$R\equiv f(x)\equiv 0 \pmod p$$

و بنابراین $f(x)$ بر $x-\alpha$ با اساس p بخش‌پذیر است .

(۳)ـ اگر $f(x)$ بر $(x-\alpha)^r$ و $(x-\beta)^r$ (با شرط $\alpha\neq\beta$) بااساس p بخش‌پذیر باشد بر حاصلضرب آنها با اساس p بخش‌پذیر است .

چون هر مقسوم‌علیه مشترك $x-\alpha$ و $x-\beta$ یك مقسوم‌علیه $\alpha-\beta$ که مستقل از x است می‌باشد .

(۴)ـ اگر $f(x)$ چند جمله‌ای درجه n باشد همنهشتی : $f(x)\equiv 0 \pmod p$ نمی‌تواند بیش از n ریشه داشته باشد هر ریشه مکرر از مرتبه r را می‌توان به عنوان r ریشه مختلف در نظر گرفت در بند ۲۷ ثابت شده است .

(۵)ـ اگر $f(x)\equiv 0 \pmod p$ یك همنهشتی ازدرجه n می‌باشدکه دارای n ریشه است و $\varphi(x)$ از درجه r فاکتوری ازآن باشد .

همنهشتی $\varphi(x)\equiv 0 \pmod p$ دارای r ریشه است. که‌نتیجه‌ای است از قسمت قبل .

(۶)ـ از قضیهٔ فرما نتیجه می‌شودکه ریشه‌های همنهشتی : $x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod p$ عبارتند از $1,2,3,\ldots,p-1$ و در نتیجه :

$$x^{p-1}-1\equiv(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \pmod p$$

وازآنجااگر a_r مجموع حاصلضرب‌های r به r اعداد $1,2,3,\ldots,p-1$ باشد

خواهیم داشت :

$$a_۱x^{p-۲}-a_۲x^{p-۳}+\cdots\cdots+a_{p-۲}x-\{(p-۱)!+۱\}\equiv ۰(\mathrm{mod}\,p)$$

بنابراین $a_r\equiv ۰(\mathrm{mod}\,p)$ بازاء $r<p-۱$ که قضیهٔ لاگرانژ می‌باشد . و همچنین $(p-۱)!+۱\equiv(\mathrm{mod}\,p)$ که قضیهٔ ویلسون است .

مثال ـ مطلوبست حل $x^۲+x+۱\equiv ۰(\mathrm{mod}\,۷)$

در این جا $۴x^۲+۴x+۴\equiv ۰$ یا $۴\equiv -۳\equiv{}^۲(۱+۲x)$ $(۲x+۱)^۲\equiv -۳\equiv ۴$

پس $۲x+۱\equiv\pm ۲$ و از آنجا $x\equiv ۲$ یا $۴(\mathrm{mod}\,۷)$

۳۵ـ یك قضیه روی کسرها.

اگر n حاصل‌ضرب‌فاکتورهای a،b،c،d،......،l که نسبت به یکدیگر اولند و m نسبت به n اول‌است، باشد دراین‌صورت کسر $\frac{m}{n}$ را می‌توان به صورت یکتای :

$$\frac{m}{n}=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}+\cdots\cdots+\frac{\lambda}{l}\pm k, \qquad \text{(A)}$$

(که در آن $\alpha,\beta,\cdots\lambda,k\in N^*$ و $\alpha<a$ ، $\beta<b$ ، ......) بیان‌نمود.

فرض‌کنیم $a'=bcd\cdots\cdots l$ پس $(a,a')=۱$ و درنتیجه اعداد صحیح x،x' را طوری می‌توان یافت‌که $a'x+ax'=m$ بعلاوه x' نسبت به a' اول است چون هر فاکتور مشترك این دو، m را که نسبت به a' اول است می‌شمارد . بنابراین :

$$\frac{m}{aa'}=\frac{x}{a}+\frac{x'}{a'}, \quad \text{و} \quad \frac{m}{n}=\frac{x}{a}+\frac{x'}{bcd\cdots\cdots l},$$

و با ادامه عمل خواهیم داشت :

$$\frac{m}{n}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\cdots\cdots+\frac{w}{l}, \qquad (x,y,w\in N^*)$$

با نوشتن $x=\alpha+k_۱a$, و $y=\beta+k_۲b,\cdots\cdots$ که در آن α،β،...... کوچکترین باقیمانده‌های مثبت x،y،...... به ترتیب با اساس‌های a،b،...... می‌باشندکسر بصورت (A) در می‌آید .

حال اگر طرفین (A) را در n ضرب کنیم ملاحظه می‌شود که :

$$\alpha.bc\cdots l\equiv m(\mathrm{mod}\,a),\quad \beta.ac\cdots l\equiv m(\mathrm{mod}\,b),\cdots$$

و چون $bc\cdots l$ نسبت به a اول است α ، بطور دقیق فقط یك مقدار کمتر از a وبطریق مشابه β بطور دقیق یك مقدار کمتر از b،...... را دارا می‌باشد پس فرم (A) یکتاست .

مثال - کسر $\frac{۱۰۱}{۱۵۴۰}$ را بفرم $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۵}+\frac{z}{۷}+\frac{u}{۱۱}+k$ بنویسید .

حل- در این‌جا مقادیر u،z،y،x، با دستگاه زیر تعیین می‌شوند :

$$۵\times۷\times۱۱x\equiv۱۰۱(\mathrm{mod}۴),\quad ۱(-۱)(-۱)x\equiv۱,$$
$$x\equiv۱(\mathrm{mod}۴),$$
$$۴\times۷\times۱۱y\equiv۱۰۱(\mathrm{mod}۵),\quad (-۱)۲\times۱\times y\equiv۱\equiv-۴,$$
$$y\equiv۲(\mathrm{mod}۵),$$
$$۴\times۵\times۱۱z\equiv۱۰۱(\mathrm{mod}۷),\quad (-۳)(-۲).۴z\equiv۳,$$
$$z\equiv۱(\mathrm{mod}۷),$$
$$۴\times۵\times۷u\equiv۱۰۱(\mathrm{mod}۱۱),\quad ۴u\equiv۱\equiv۱۲,$$
$$u\equiv۳(\mathrm{mod}۱۱),$$

در نتیجه $x=۱$ ، $y=۲$ ، $z=۱$ ، $u=۳$ و داریم:

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۱۱}=۱\frac{۱۰۱}{۱۵۴۰};\Rightarrow k=-۱,$$

تمرین

۱- اگر $x\equiv a(\mathrm{mod}۱۶)\equiv b(\mathrm{mod}۵)\equiv c(\mathrm{mod}۱۱)$ باشد .
ثابت کنید :

$$x\equiv۳۸۵a+۱۷۶b-۵۶۰c(\mathrm{mod}۸۸۰),$$

۲- اگر $x\equiv a(\mathrm{mod}۳)\equiv b(\mathrm{mod}۵)\equiv c(\mathrm{mod}۷)$ باشد .
ثابت کنید:

$$x\equiv-۳a+۲۱b+۱۵c(\mathrm{mod}۱۰۵),$$

۳ـ کسر $\frac{1}{1760}$ را بفرم $\frac{x}{32}+\frac{y}{5}+\frac{z}{11}\pm k$, بنویسید.
($z<11$ ،$y<5$ ،$x<32$) و ثابت کنید که بصورت $\frac{7}{32}+\frac{3}{5}+\frac{2}{11}-1$
می‌باشد.

۴ـ مطلوبست حل دستگاه :

$$x\equiv 1 \pmod 2 \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 5 \pmod 7;$$
$$[x\equiv 173 \pmod{210}]$$

۵-a) ثابت کنید همنهشتی $3x^4+2x^3+2x^2+2x\equiv 0 \pmod 5$
معادل با همنهشتی زیر می‌باشد :

$$3x^{14}+4x^{13}+3x^{12}+2x^{11}+x^9+2x^8+$$
$$+4x^7+x^6+3x^4+x^3+3x^2+2x\equiv 0 \pmod 5,$$

b) ثابت کنید همنهشتی $x^5+5x^4+3x^2+3x+2\equiv 0 \pmod 7$
معادل با همنهشتی زیر می‌باشد :

$$2x^{17}+6x^{16}+x^{14}+5x^{12}+3x^{11}+2x^{10}+x^9+5x^8+$$
$$+2x^7+3x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x+4\equiv 0 \pmod 7$$

۶ـ مطلوبست تعیین یك همنهشتی معادل با همنهشتی زیر که ضریب x^6 آن مساوی واحد باشد.

$$70x^6+78x^5+25x^4+63x^3+52x^2+4x+3\equiv 0 \pmod{101}$$

جواب:

$$[x^6+4x^5+22x^4+76x^3+10x^2+52x+39\equiv 0 \pmod{101}]$$

مطلوبست حل :

۷ـ $7x^4+19x+25\equiv 0 \pmod{27}$, $[x\equiv 16 \pmod{27}]$,

۸ـ $x^3+2x+2\equiv 0 \pmod{125}$, $[x\equiv 113 \pmod{125}]$,

۹ـ $x^4+4x^3+2x^2+2x+12\equiv 0 \pmod{625}$,

$[x\equiv 43, 123, 168, 248, 293, 373, 418,$
$498, 543, 623 \pmod{625}]$

۱۰- $۶x^{۳}+۲۷x^{۲}+۱۷x+۲۰\equiv ۰ \pmod{۳۰}$,

$[x\equiv ۲,۵,۱۱,۱۷,۲۰,۲۶ \pmod{۳۰}]$

۱۱- $۳۱x^{۴}+۵۷x^{۳}+۹۶x+۱۹۱\equiv ۰ \pmod{۲۲۵}$,

$[x\equiv ۷۶,۲۲,۱۷۶,۱۲۲ \pmod{۲۲۵}]$

۱۲- اگر a یك عددفردصحیح باشدثابت‌کنید $a^{۲}\equiv ۱ \pmod{۸}$ و با استقراء نتیجه بگیرید که $a^{۲^{n}}\equiv ۱ \pmod{۲^{n+۲}}$

۱۳- اگر $n\in N^*$ و φ تابع اولر باشد . در این صورت همنهشتی $\varphi(n)\equiv ۲ \pmod{۴}$ فقط وفقط بازاء $n=۴,p^{\alpha},۲p^{\alpha}$ $(\alpha\in N^*)$ برقرار می‌باشد که در آن عدد اول p مساوی است با $p\equiv ۳ \pmod{۴}$.

رابطهٔ متناظر را برای $\varphi(n)\equiv ۲ \pmod{۸}$ بدست آورید .

۱۴- اگر p یك عدد اول و $n\in\{۱,۲,\dots p-۱\}$ باشد . عدد یکتای $\rho(n)$ در همان مجموعه طوری وجود دارد که $n\rho(n)\equiv ۱ \pmod{p}$, ثابت‌کنید $\rho(n)+\rho(p-n)=p$ و از آنجا ثابت‌کنید که :

$$\sum_{n=۱}^{\frac{۱}{۲}(p-۱)} \{\rho(n)\}^{۲}\equiv \sum_{n=۱}^{\frac{۱}{۲}(p-۱)} n^{۲} \pmod{p},$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که بازاء $p>۳$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\frac{۱}{۲}(p-۱)} \{\rho(n)\}^{۲}\equiv ۰ \pmod{p}.$$

۱۵- اگر $x_{۱},x_{۲},\dots x_{n}$ که درآن $n=\varphi(m)$ می‌باشد دسته ساده باقیمانده‌های با اساس m با شرط

$m=p_{۱}^{a_{۱}}p_{۲}^{a_{۲}}\cdots p_{r}^{a_{r}}$. ($p_{۱}$،$p_{۲}$، ...... اعداد اولند)

باشد ثابت کنید $x_{۱}+b,x_{۲}+b\dots x_{n}+b$ فقط و فقط در صورتی دسته ساده باقیمانده‌های با اساس m می‌باشد که $p_{۱}p_{۲}\cdots p_{r}|b$.

۱۶- اگر $ab\equiv ۱ \pmod{m}$ بنابراین اعداد صحیح a،b دارای یك

مرتبه با اساس m می‌باشند .

۱۷ـ اگر a، b دارای مرتبه‌های α، β بااساس m و ۱ $=(\alpha,\beta)$ باشد. ثابت‌کنید ab دارای مرتبه $\alpha\beta$ با اساس m می‌باشند .

۱۸ـ ثابت‌کنید :

$$(۱)\quad a^{۱۳}-a\equiv ۰ \pmod{۲۷۳۰}$$

$$(۲)\quad a^{۱۷}-a\equiv ۰ \pmod{۸۱۶۰},$$ a عدد فرد است .

$$(۳)\quad n^{۳۶}-۱\equiv ۰ \pmod{۳۳۷۴۴},$$

(عدد n نسبت به ۲، ۳، ۱۹، ۳۷ اول است .)

۱۹ـ ثابت‌کنید اگر $۲n+۱$ یك عدد اول باشد. باقیمانده‌های تقسیم $۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, \cdots, n^۲$ بر $۲n+۱$ همگی مختلف‌اند .

۲۰ـ یك جعبه شامل $۲n$ کارت می‌باشد ترتیب اصلی کارت‌ها:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \cdots\cdots, ۲n-۳, ۲n-۲, ۲n-۱, ۲n$$

می‌باشند با جابجاشدن کارت‌ها، ترتیب بفرم:

$$n+۱, ۱, n+۲, ۲, \cdots\cdots ۲n-۱, n-۱, ۲n, n$$

درآمده. اگر یك کارت که محل اصلی آن $x_۱$ بوده بعد ازجابجاشدن به محل $x_۲$ درآمده دراینحال ثابت کنید $x_۲\equiv ۲x_۱ \pmod{۲n+۱}$, واز آنجا نتیجه بگیرید که اگر جابجاشدن کارت‌هارا بهمین‌ترتیب ادامه دهیم و $۲n+۱$ عدداول باشد تمام کارت‌ها وقتی یکی از آنها در محل اصلی‌اش قرارگرفت در محل اصلی خود قرار می‌گیرند .

۲۱ـ ثابت‌کنید همنهشتی خطی :

$$a_۱x_۱+a_۲x_۲+\cdots\cdots+a_nx_n\equiv b \pmod{m},$$

فقط و فقط در صورتی دارای یك جواب است که $(a_۱, a_۲, \cdots\cdots a_n, m)|b$

۲۲ـ ثابت‌کنید :

$$۱)\quad a^{۵۶۱}\equiv a \pmod{۱۱};\quad ۲)\quad ۲^{۱۱\times ۳۱}\equiv ۲ \pmod{۱۱\times ۳۱}.$$

$$۳)\quad \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right)^{p}\equiv \sum_{i=۱}^{n} a_i^{\,p} \pmod{p}.$$

$$۴)\quad \sum_{i=۱}^{p-۱} i^{k(p-۱)} + ۱ \equiv ۰ \pmod{p}.$$

۲۳ـ مطلوبست حل دستگاه همنهشتی:

$$۱)\quad \begin{cases} ۹y \equiv ۱۵ \\ ۷x - ۳y \equiv ۱ \end{cases} \pmod{۱۲};$$

$$۲)\quad \begin{cases} x + ۵y \equiv ۵ \\ ۵x + ۳y \equiv ۱ \end{cases} \pmod{۶};$$

$$۳)\quad \begin{cases} ۳x + ۵y \equiv ۲ \\ ۶x + ۲y \equiv ۴ \end{cases} \pmod{۸};$$

$$۴)\quad \begin{cases} x - y \equiv ۲ \pmod{۳}, \\ ۵x + ۳y \equiv ۱ \pmod{۶}. \end{cases}$$

جواب:

$$۱)\quad \begin{cases} x \equiv ۱۰; \\ y \equiv ۳; \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv ۱۰; \\ y \equiv ۷; \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv ۱۰; \\ y \equiv ۱۱; \end{cases} \pmod{۱۲}.$$

$$۲)\quad \begin{cases} x \equiv ۵ \\ y \equiv ۰ \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv ۲ \\ y \equiv ۳ \end{cases} \pmod{۶};$$

$$۳)\quad y \equiv x + ۲, x + ۶ \pmod{۸};$$

$$۴)\quad \begin{cases} x \equiv -۱; \\ y \equiv ۰; \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv ۲ \\ y \equiv ۳ \end{cases} \pmod{۶}.$$

۲۴ـ ثابت کنید اگر $\sum_{i=۱}^{n} a_i \equiv ۰ \pmod{۳۰}$ باشد داریم:

$$\sum a_i^۵ \equiv ۰ \pmod{۳۰}.$$

۳۵ـ تعریف :

۱ـ برحسب تعریف جذر یا بطورکلی ریشهٔ mام عدد A تا واحد تقریب عددیست مانند a که صادق درنامساویهای زیر باشد:

$$a^m \leqslant A < (a+1)^m, \quad a^2 \leqslant A < (a+1)^2 \text{.................} (1)$$

جذر تا واحد تقریب نقصانی A مساویست با جذر تا واحد تقریب نقصانی قسمت صحیح A .

بنابراین جذر یا ریشهٔ mام تا $\frac{p}{q}$ تقریب نقصانی عدد A عبارتست از $x \times \frac{p}{q}$ که در نا مساوی‌های زیر صدق کند:

$$\left(x \times \frac{p}{q}\right)^2 \leqslant A < \left[(x+1)\frac{p}{q}\right]^2;$$
$$\left(x \times \frac{p}{q}\right)^m \leqslant A < \left[(x+1)\frac{p}{q}\right]^m;$$

بنابراین جذر یا ریشهٔ mام تا $\frac{1}{10^n}$ تقریب نقصانی عددغیرمشخص A کسر اعشاری $\frac{x}{10^n}$ است که در نامساوی‌های زیرصدق کند :

$$\left(\frac{x}{10^n}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{10^n}\right)^2,$$
$$\left(\frac{x}{10^n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{x+1}{10^n}\right)^m;$$

۲ـ رابطه (۱) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$0 \leqslant A - a^2 < 2a+1;$$

تفاضل $A - a^2 = R$ راباقیماندهٔ جذر می‌نامند . بنابراین برای‌آنکه a، R جذر وباقیماندهٔ جذر عدد مفروض A باشد باید:

$$0 \leqslant R \leqslant 2a+1$$

مثال ۱ـ اعدادی را تعیین کنیدکه بر a بخش‌پذیر بوده و جذرتقریبی

آنها تا یك واحد تقریب برابر a باشد (در حالت $a=۲۷$ جواب مسأله را بدست آورید) . امتحان نهائی سال ششم خرداد ۱۳۴۸

پس عدد بصورت $ka=a^۲+R$ می‌باشد یعنی R مضربی است از a و چون $R<۲a+۱$ می‌باشد پس $R=a$ و $R=۲a$ و اعداد مطلوب عبارتند از $a^۲+a$ و $a^۲+۲a$ که بازاء $a=۲۷$ اعداد ۷۵۶ و ۷۸۳ حاصل می‌شوند.

مثال ۲ـ مطلوبست مقادیر a برای آنکه جذر $\frac{a}{۱۰۰}$ تا $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقریب مساوی $\frac{a}{۱۰۰}$ باشد .

در این حال داریم:
$$\left(\frac{a}{۱۰۰}\right)^۲\leqslant\frac{a}{۱۰۰}<\left(\frac{a+۱}{۱۰۰}\right)^۲,$$

یا
$$a^۲\leqslant۱۰۰a<(a+۱)^۲$$

یا
$$a\leqslant۱۰۰<a+۲+\frac{۱}{a}$$

یا
$$a\leqslant۱۰۰\leqslant a+۲$$

و از آنجا دو جواب $a=۹۸$ و $a=۹۹$ حاصل می‌شود .

مثال ۳ـ صورت a کسر $\frac{a}{b}$ مفروض است مطلوبست مقادیر ممکن b برای آنکه جذر $\frac{a}{b}$ تا $\frac{۱}{b}$ تقریب مساوی $\frac{a}{b}$ باشد .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^۲\leqslant\frac{a}{b}<\left(\frac{a+۱}{b}\right)^۲$$

$$a^۲\leqslant ab<(a+۱)^۲$$

$$a\leqslant b<a+۲+\frac{۱}{a},$$

یا
$$a\leqslant b\leqslant a+۲$$

و از آنجا $b=a$ و $b=a+۱$ و $b=a+۲$.

مثال۴ـ جذرتا $\frac{۱}{۱۰}$ تقریب یك کسرغیرممکن‌التحویل ۱/۳ می‌باشد اگر مجموع جملات این کسر ۸۱ باشد . آنرا تعیین کنید .

فرض‌کنیم $\frac{a}{b}$ کسر مفروض باشد داریم:

$$۱/۳<\sqrt{\frac{a}{b}}<۱/۴,$$

$$۱/۶۹<\frac{a}{b}<۱/۹۶;$$

$$۲/۶۹<\frac{a+b}{b}<۲/۹۶;$$

چون $a+b=۸۱$ است پس :

$$۲/۶۹<\frac{۸۱}{b}<۲/۹۶$$

و ازآنجا $b<\frac{۸۱}{۲/۶۹}$ و $b>\frac{۸۱}{۲/۹۶}$ و درنتیجه ......$۲۷,$......$<b<۳۰,$

پس : $b=۲۸,۲۹$ و یا $b=۳۰$ و از آنجا $a=۵۳,۵۲$ یا ۵۱ .

مثال ۵ ـ مطلوبست محاسبه جذر $\frac{۱۱۷۵}{۲۸}$ تا $\frac{۲}{۹}$ تقریب .

در این‌حال اگر $x\times\frac{۲}{۹}$ جذر عدد مفروض باشد داریم :

$$\left(x\times\frac{۲}{۹}\right)^{۲}\leqslant\frac{۱۱۷۵}{۲۸}<\left[(x+۱)\times\frac{۲}{۹}\right]^{۲},$$

یا

$$x^{۲}\leqslant۸۴۹+\frac{۸۷}{۱۱۲}<(x+۱)^{۲},$$

بنابراین x جذر عدد ۸۴۹ تا یك واحد تقریب می‌باشد و از آنجا :

$x=۲۹$ و جذر مطلوب برابر $\frac{۵۸}{۹}$ می‌باشد .

تمرین

۱ـ مطلوبست محاسبه جذر عبارات :

$$۱)\quad ۲a^۲(b+c)^۲+۲b^۲(c+a)^۲+۲c^۲(a+b)^۲+$$
$$+۴abc(a+b+c).$$

$$۲)\quad (a-b)^۴-۲(a^۲+b^۲)(a-b)^۲+۲(a^۴+b^۴),$$

$$۳)\quad x^۲(x^۲+y^۲+z^۲)+y^۲z^۲+۲x(y+z)(yz-x^۲).$$

$$۴)\quad ۳\{(b-c)^۶+(c-a)^۶+(a-b)^۶-$$
$$-۲(a^۲+b^۲+c^۲-bc-ca-ab)^۳\}$$

$$۵)\quad ۲\{(b-c)^۴+(c-a)^۴+(a-b)^۴\}$$

۲ـ ثابت کنید:

$$\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}\Big(\overbrace{۱۱۱\ldots۱}^{۳n}-\overbrace{۳۳۳\ldots۳}^{n}\overbrace{۰۰۰\ldots۰}^{n}\Big)}=\overbrace{۳۳۳\ldots۳}^{n};$$

$$\sqrt{\overbrace{۱۱۱\ldots۱}^{۲n}-\overbrace{۲۲۲\ldots۲}^{n}}=\overbrace{۳۳۳\ldots۳}^{n};$$

۳ـ اعداد $A=(n+۱)(n+۲)$ ، $B=(n+۱)(n+۲)(n+۳)$

$C=(n+۱)(n+۲)(n+۳)(n+۴)$ و

$D=(n+۱)(n+۲)(n+۳)(n+۴)(n+۵)$

مفروضند ، مطلوبست تا یك واحد تقریب :

الف ـ جذر A ب ـ کعب B

ج ـ ریشه چهارم عدد C د ـ ریشه پنجم عدد D

[جواب: $n+۱$ ، $n+۱$ ، $n+۲$ و $n+۲$]

۴ـ کدامیك از اعداد $n+۱$ ، $n+۲$ ، $n+۳$ به :

$\sqrt[۳]{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}$ نزدیك‌تر است . (جواب: $n+۲$)

۵ـ اگر $a+b\sqrt[۳]{p}+c\sqrt[۳]{p^۲}=۰$, و اعداد a، b، c، p گویا و p مکعب کامل نباشد ثابت کنید $a=b=c=۰$.

۶ــ مطلوبست محاسبه a،b درتساوی $\sqrt[3]{۲۶+۱۵\sqrt{۳}}=a+b\sqrt{۳}$;

[جواب: $a=۲, b=۱$]

۷ــ اگر $(۶\sqrt{۶}+۱۴)^{۲r+۱}=N$, و F قسمت کسری آن باشد ثابت کنید $NF=۲۰^{۲n+۱}$

۸ــ اگر $(۳\sqrt{۳}+۵)^{۲r+۱}=I+F$, که درآن I قسمت صحیح و F قسمت کسر محض باشد. ثابت کنید $F(I+F)=۲^{۲r+۱}$

۹ــ ثابت کنید قسمت صحیح $(\sqrt{۳}+۱)^{۲n+۱}$ مساویست با:

$$(\sqrt{۳}+۱)^{۲n+۱}-(\sqrt{۳}-۱)^{۲n+۱}$$

۱۰ــ عبارت زیر را گویا کنید:

$$(xy)^{\frac{۱}{۳}}(x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}})=a^{\frac{۴}{۳}};$$

جواب: $۲۷a^۴x^۴y^۴=[a^۴-xy(x^۲+y^۲)]^۳.$

۱۱ــ ثابت کنید که عدد:

$$N=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۲^۶}+\frac{۱}{۲^{۱۰}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}}$$

اصم است:

۱۲ــ ثابت کنید:

$$۱)\quad \frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲^{\frac{۱}{۴}}n^{\frac{۳}{۴}}$$

$$۲)\quad \sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}<n\sqrt{(n+۱)/۲}<\sqrt{(n+۱)^۳}$$

۱۳ــ اگر a_i و b_i مقادیر حقیقی و تعداد آنها n باشد ثابت کنید:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\right)}+\sqrt{\left(\sum_{i=۱}^{n}b_i^۲\right)}\geqslant\sqrt{\{(a_۱+b_۱)^۲+\cdots+(a_n+b_n)^۲\}}.$$

۱۴ــ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ زیر $۳-۳^{\frac{۱}{۳}}-۳^{\frac{۲}{۳}}$ باشد سایر

ریشه‌های آنرا بنویسید:

$$x^{6}-9x^{5}+18x^{4}+9x^{3}+27x^{2}-54x-36=0;$$

۱۵ـ ثابت کنید: $(5-\sqrt{17})^{n}-(5+\sqrt{17})^{n}-10^{n}$ بر 2^{n+1} بخش‌پذیر است .

۱۶ـ اگر $a>0$ باشد ثابت کنید:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots\cdots+\sqrt{a}}}}<\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2};$$

۱۷ـ ثابت کنید:

$$2>\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}>\cdots\cdots\sqrt[n-1]{n}>\sqrt[n]{n+1}>\cdots\cdots$$

فصل ۲

کسرهای مسلسل

کسرهای مسلسل

۱ـ تعریف ـ عبارت بفرم $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots}}$ کسر مسلسل گفته می‌شود: در این‌جا حروف a، b، c، ...... مقادیر دلخواهی را نشان می‌دهند و برای سهولت آنرا بفرم $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$ نمایش می‌دهیم که در آن a_1، a_2، a_3، ...... اعداد صحیح ومثبت می‌باشند ومعمولاً آنرا بفرم زیر می‌نویسند:

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\cdots\cdots$$

۲ـ اگر تعداد خارج قسمت‌های a_1، a_2، ..... محدود باشد کسر را **محدود** (پایان‌دار) و اگر تعداد آنها نامحدود باشد آنرا **کسر مسلسل نامحدود** (بی‌پایان) می‌نامند . هر کسر مسلسل محدود را با ساده کردن می‌توان به کسر معمولی تبدیل کرد .

۳ـ تبدیل کسر مفروض به کسر مسلسل.

اگر $\frac{m}{n}$ کسر مفروضی باشد، m را بر n تقسیم کرده فرض می‌کنیم a_1 خارج‌قسمت و p باقیمانده باشد، پس:

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\frac{1}{\frac{n}{p}}$$

با تقسیم n بر p اگر a_2 خارج‌قسمت و q باقیمانده باشد داریم:

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{\frac{p}{q}};$$

با تقسیم p بر q اگر a_3 خارج‌قسمت و r باقیمانده باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A),$$

اگر $m<n$, باشد اولین خارج قسمت صفر است و می‌توان نوشت:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$$

مثال ۱ـ کسر $\frac{۲۵۱}{۸۰۲}$ را به کسرهای متقارب تبدیل کنید.

$$\frac{۲۵۱}{۸۰۲}=\frac{۱}{۳+}\,\frac{۱}{۵+}\,\frac{۱}{۸+}\,\frac{۱}{۶}.$$

۴ـ کسرهای حاصل، با توقف عمل در اولین، دومین، سومین، ......rامین خارج قسمت، اولین، دومین، سومین، ......rامین تقارب نامیده می‌شوند. و هر تقارب از تقارب قبلی خود به مقدار واقعی کسر نزدیکتر است[1].

۱ــ اثبات این مطلب را می‌توانید در روشهای جبر تألیف پرویز شهریاری مطالعه نمایید.

۵ـ تقارب‌های متوالی یك درمیان ازمقدارکسر مسلسل بیشتر وکمتر می‌باشند .

کسر (A) را در نظر می‌گیریم اولین تقارب a_1 است که بعلت حذف $\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\ldots\ldots$ خیلی کوچك است . دومین تقارب $a_1+\frac{1}{a_2}$ است که خیلی زیادتر است چون مخرج a_2 کوچك است سومین تقارب $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}$ است که خیلی کوچك است چون $a_2+\frac{1}{a_3}$ زیاد است و ......

هنگامی کسر مفروض محض است که $a_1=0$, اگر دراین‌حالت صفر را بعنوان اولین تقارب بپذیریم‌نتیجه بالا را به صورت زیرمی‌توان بیان‌نمود:

تقارب‌های‌مرتبهٔ فرد همگی‌کمتر و تقارب‌های مرتبهٔ زوج زیادتر از مقدار کسر مسلسل می‌باشند .

۶ـ قانون‌کسرهای مسلسل .

کسر مسلسل
$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\ldots\ldots$$
را در نظر می‌گیریم سه تقارب اولیه عبارتند از:

$$\frac{a_1}{1},\quad \frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3a_2+1}$$

ملاحظه می‌شودکه صورت تقارب سوم رامی‌توان ازضرب صورت‌تقارب دوم در سومین خارج قسمت و جمع صورت اولین تقارب بدست آورد و مخرج را به طریق مشابه می‌توان نوشت .

فرض می‌کنیم‌تقارب‌های متوالی‌به طریق مشابه نوشته شده‌باشند صورت آنها رابه p_1، p_2، p_3، ...... ومخرج آنها را به q_1، q_2، q_3، ...... نمایش‌می‌دهیم.

چنانچه قانون فوق برای تقارب nام برقرار باشد یعنی:

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2};\qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\cdots\cdots\cdots(A)$$

تقارب $(n+1)$ام دارای خارج قسمت $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ به‌جای a_n خارج

قسمت تقارب nام می‌باشد پس تقارب $(n+1)$ام مساویست با :

$$\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=$$

$$=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}},$$

پس می‌توان نوشت :

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1} \quad \text{و} \quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$$

۷ـ a_n خارج قسمت جزئی nام اصطلاح می‌شود خارج قسمت کامل در این مرحله عبارتست از:

$$a_n+\frac{1}{a_{n+1}+}\;\frac{1}{a_{n+2}+}\cdots\cdots$$

خارج قسمت کامل را معمولاً به k نمایش می‌دهند .

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}},$$

فرض کنیم کسر مسلسل مساوی x باشد ، بنابراین x اختلافش با p_n/q_n تنها در گرفتن خارج قسمت کامل k به جای خارج قسمت جزئی a_n می‌باشد. پس:

$$x=\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}},$$

۸ـ اگر p_n/q_n تقارب nام کسر مسلسلی باشد داریم:

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

فرض کنیم کسر مسلسل به صورت $\cdots\cdots \quad a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\;\frac{1}{a_4+}$ باشد.

پس:

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=$$

$$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})\,q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$

$$=(-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})$$

بطریق مشابه
$$=(-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}),$$
$$=\dots\dots\dots\dots$$
$$=(-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2)$$
$$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1\cdot a_2=1=(-1)^2$$
$$\therefore \quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

نتیجهٔ ۱ـ هر تقارب با ساده‌ترین جمل می‌باشد (غیرممکن‌التحویل)، چون اگر p_n ، q_n دارای مقسوم علیه مشترك باشند این مقسوم‌علیه $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$ یعنی یك را عاد می‌کند که غیرممکن است .

نتیجهٔ ۲ـ تفاضل بین دوتقارب متوالی کسری‌است که صورت آن واحد است چون :
$$\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}$$

تمرین

ثابت کنید :

۱ - $$\frac{p_{n+1}-p_{n-1}}{q_{n+1}-q_{n-1}}=\frac{p_n}{q_n},$$

۲ - $$\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right)=\left(\frac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right).$$

۳ - $$p_{n+2}q_{n-2}\sim p_{n-2}q_{n+2}=a_{n+2}\times a_{n+1}\times a_n+a_{n+2}+a_n$$

۴ - $$\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}=$$
$$=\frac{1}{a+}\;\frac{1}{(a+1)+}\;\frac{1}{(a+2)+}\;\frac{1}{(a+3)+}\,.$$

$$5-\ a(x_1+\frac{1}{ax_2+}\ \frac{1}{x_3+}\ \frac{1}{ax_4+}\ \cdots\cdots$$ = (تا $2n$ خارج قسمت

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\ \frac{1}{ax_3+}\ \frac{1}{x_4+}\ \cdots\cdots$$ تا $2n$ خارج قسمت

۶ـ اگر $\frac{M}{N}$ ، $\frac{P}{Q}$ ، $\frac{R}{S}$ تقارب‌های nام، $(n-1)$ام، $(n-2)$ام کسرهای مسلسل

$$\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots;\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\cdots\cdots$$ و

$$\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5+}\ \cdots\cdots$$

به ترتیب باشند . ثابت کنید :

$$N=(a_1a_2+1)P+a_1R,\quad M=a_2P+R,$$

(برای اثبات می‌توان نوشت :

$$\frac{M}{N}=\frac{1}{a_1+}\ \frac{P}{Q}=\frac{Q}{a_1Q+P}$$
$$\frac{P}{Q}=\frac{1}{a_2+}\ \frac{R}{S}=\frac{S}{a_2S+R},$$

چون کسور ساده می‌باشند پس $M=Q$، $N=a_1Q+P$ ، $P=S$، $Q=a_2S+R$ و نتیجه فوراً حاصل می‌شود .)

۷ـ در کسر مسلسل $\cdots\cdots\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}$ ثابت کنید :

(۱) $$p_n^2+p_{n+1}^2=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2},$$

(۲) $$p_n=q_{n-1}$$

۹ـ کسرهای مسلسل متناوب .

اگر بعد از چندمرحله عناصر موجود درکسر بهمان‌ترتیب‌تکرارشوند کسر را کسر مسلسل «متناوب» گویند عناصر تکرار شوندهٔ دورهٔ تناوب و یا سیکل و عناصر غیرتکراری اگر وجود داشته باشند قسمت **غیرمتناوب** کسر مسلسل را تشکیل می‌دهند .

دورهٔ تناوب معمولا با ستاره‌ای که زیر اولین و آخرین عناصر تکرار شونده قرار می‌دهند نشان داده می‌شود . پس کسر:

$$\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۴+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۴+}\ \cdots\cdots$$

را با . $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۳_*+}\ \frac{۱}{۴_*+}$ نمایش می‌دهند در این‌جا $\frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۴+}$ دورهٔ تناوب و $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}$ قسمت غیرمتناوب می باشد.

مثال ـ اگر p_n/q_n تقارب nام کسر متناوب

$$\frac{۱}{a+}\ \frac{۱}{b+}\ \frac{۱}{a+}\ \frac{۱}{b+}\ \cdots\cdots$$

باشد . ثابت کنید :

$$p_n-(ab+۲)p_{n-۲}+p_{n-۴}=۰,$$
$$q_n-(ab+۲)q_{n-۲}+q_{n-۴}=۰,$$

اگر n زوج باشد داریم :

$$p_n=bp_{n-۱}+p_{n-۲},$$
$$p_{n-۱}=ap_{n-۲}+p_{n-۳},$$
$$p_{n-۲}=bp_{n-۳}+p_{n-۴}$$

و ازآنجا باحذف $p_{n-۱}$ ، $p_{n-۳}$ داریم :

$$p_n-(ab+۲)p_{n-۲}+p_{n-۴}=۰,$$

و اگر n فرد باشد جای a و b عوض می‌شوند و همان نتیجه را خواهیم داشت .

۱۰ ـ هرکسر مسلسل متناوب مساوی یك ریشهٔ معادلهٔ درجه دومی است که ضرایب آن صحیح می‌باشند .

گیریم x مقدارکسر مسلسل و y قسمت تناوبی‌آن‌باشد. فرض‌کنیم :

$$x=a+\frac{۱}{b+}\ \frac{۱}{c+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{h+}\ \frac{۱}{k+}\ \frac{۱}{y},$$

و

$$y=m+\frac{۱}{n+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{u+}\ \frac{۱}{v+}\ \frac{۱}{y},$$

که در آن $\{a,b,c,\dots m,n,\dots u,v\in N^*\}$

اگر $\frac{p}{q}$ ، $\frac{p'}{q'}$ تقارب x متناظر خارج قسمت‌های h ، k به ترتیب باشد
لذا چون y خارج قسمت کامل است داریم :

$$x=\frac{p'y+p}{q'y+q} \text{ و از آنجا } y=\frac{p-qx}{q'x-p'}$$

اگر $\frac{r}{s}$ ، $\frac{r'}{s'}$ تقارب‌های y متناظر با خارج قسمت‌های u ، v به‌ترتیب باشد داریم : $y=\frac{r'y+r}{s'y+s}$.

و از این‌جا معادلهٔ درجه دوم $s'y^{2}+(s-r')y-r=0$, باضرایب گویا را خواهیم داشت : که مقدار $y_1>0$ را بدست می‌دهد . با قرار دادن این مقدار y_1 در $x=\frac{p'y+p}{q'y+q}$ و گویا کردن مخرج مقدار x بفرم $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ حاصل می‌شود .

مثال- کسر $x=1+\frac{1}{2+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{3+}\dots$ را بصورت اصم بیان کنید .

$$x-1=\frac{1}{2+}\;\frac{1}{3+(x-1)},\ \Longrightarrow 2x^{2}+2x-7=0 \Longrightarrow$$

$$x=\frac{\sqrt{15}-1}{2}.$$

۱۱- تبدیل یك رادیکال درجه دوم به‌کسر مسلسل .

فرض کنیم N عددمثبت وصحیحی باشد که مربع کامل نیست و a_1 بزرگترین عدد صحیح در $\sqrt{N}$ باشد پس :

$$\sqrt{N}=a_1+(\sqrt{N}-a_1)=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1} \text{ اگر } r_1=N-a_1^{2},$$

اگر b_1 بزرگترین عدد صحیح در $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ باشد داریم :

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-b_1r_1+a_1}{r_1}=$$

$$=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2},$$

که درآن $a_2=b_1r_1-a_1$ و $r_1r_2=N-a_2^2$.

بطریق مشابه :

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}-a_3}{r_2}=b_2+\frac{r_3}{\sqrt{N}+a_3},$$

که در آن : $a_3=b_2r_2-a_2;\quad r_2r_3=N-a_3^2$

و با ادامهٔ عمل بطور کلی داریم :

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{\sqrt{N}-a_n}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{r_n}{\sqrt{N}+a_n};$$

که درآن : $a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1}$ و $r_{n-1}r_n=N-a_n^2$

$$\therefore\qquad \sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\;\frac{1}{b_2+}\;\frac{1}{b_3+}\;\frac{1}{b_4+}\;\cdots\cdots$$

پس $\sqrt{N}$ را می‌توان بصورت یك کسر نامتناهی مسلسل نوشت و اکنون ثابت می‌کنیم که این کسر متناوب است و شروع تناوب از مرحله‌ایست که اولین خارج قسمت تکرار می‌شود .

سری خارج قسمت‌های

$$\sqrt{N}\text{ و }\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}\text{ و }\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}\text{ و }\frac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}\text{ و }\cdots\cdots$$

اولین، دومین، سومین، چهارمین و...... خارج قسمت‌کامل می‌نامیم.

۱۲ـ در بند قبل دیده شد که مقادیر a_1، r_1، b_1، b_2، b_3، ...... مثبت و صحیح می‌باشندا کنون ثابت‌می کنیم که مقادیر a_2، a_3، a_4، ...... r_2، r_3، r_4، ...... همچنین مثبت و صحیح می‌باشند.

فرض می‌کنیم $\frac{p}{q}$ ، $\frac{p'}{q'}$ ، $\frac{p''}{q''}$ سه تقارب متوالی $\sqrt{N}$ و $\frac{p''}{q''}$ تقارب

باخارج قسمت جزئی b_n باشد. خارج‌قسمت‌کامل دراین‌مرحله $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ و از آنجا :

$$\sqrt{N}=\frac{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}p'+p}{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}q'+q}=\frac{p'\sqrt{N}+a_np'+r_np}{q'\sqrt{N}+a_nq'+r_nq}$$

با طرفین وسطین و معادل قراردادن ضرایب گویا و اصم داریم :

$$a_np'+r_np=Nq' \qquad a_nq'+r_nq=p';$$

$$\therefore \quad a_n(pq'-p'q)=pp'-qq'N,$$

$$r_n(pq'-p'q)=Nq'^{۲}-p'^{۲};$$

وچون $pq'-p'q=\pm ۱$; و $pq'-p'q$ ، $pp'-qq'N$ و $Nq'^{۲}-p'^{۲}$ دارای‌یك علامت می‌باشند (زیرا اگر فرض‌کنیم p/q ، p'/q' دوتقارب متوالی‌کسر مسلسل x باشند مقدار pp'/qq' بزرگتر ویاکوچکتر از $x^۲$ است برحسب اینکه p/q بزرگتر یاکمتر p'/q' باشد.

فرض‌کنیم k خارج قسمت‌کامل متناظر باتقارب بلافاصله بعد از p'/q' باشد . پس $x=\frac{kp'+p}{kq'+q}$

$$\therefore \quad \frac{pp'}{qq'}-x^{۲}=\frac{۱}{qq'(kq'+q)^{۲}}\times$$

$$\times\{pp'(kq'+q)^{۲}-qq'(kp'+p)^{۲}\}$$

$$=\frac{(k^{۲}p'q'-pq)(pq'-p'q)}{qq'(kq'+q)^{۲}},$$

عامل $k^{۲}p'q'-pq$ مثبت است چون $p'>p$ ، $q'>q$ و $k>۱$ و از آنجا pp'/qq' بزرگتر و یا کوچکتر از $x^{۲}$ است برحسب اینکه $pq'-p'q$ مثبت و یا منفی باشد یعنی برحسب اینکه $\frac{p}{q}$ بزرگتریاکوچکتر

$\frac{p'}{q'}$ باشد . در نتیجه سه عبارت فوق دارای یك علامت می‌باشند) از آنجا a_n و r_n بازاء جمیع مقادیر صحیح $n>۱$ مثبت و صحیح می‌باشند .

در بند قبل دیده شد که $r_n r_{n-۱}=N-a_n^۲$, از این رابطه نتیجه می‌شود که a_n باید کمتر از $\sqrt{N}$ و بنابراین a_n نمی‌تواند بزرگتر از $a_۱$ باشد ازآنجا تنها مقادیر ممکن a_n عبارتند از $\{۱,۲,\ldots\ldots,a_۱\}$ یعنی تعداد مقادیرمختلف a_n نمی‌تواند بیش از $a_۱$ باشد .

و از طرف دیگر $a_{n+۱}=r_n b_n-a_n$ یا $a_{n+۱}+a_n=r_n b_n$ و بنابراین $r_n b_n$ نمی‌تواند بیشتر از $۲a_۱$ باشد. وچون b_n صحیح و مثبت است پس r_n نمی‌تواند بیشتر از $۲a_۱$ باشد یعنی تعداد مقادیر مختلف r_n نمی‌تواند بیشتر از $۲a_۱$ باشد .

بنابراین عبارت $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ نمی‌تواندبیش از $۲a_۱ \times a_۱$ یا $۲a_۱^۲$ مقدار مختلف داشته باشد. پس بعد از $۲a_۱^۲$ خارج قسمت (حداکثر) دوباره بایستی تکرار شود .

مثال ۱ــ $۳\sqrt{۵}$ را به‌کسر مسلسل تبدیل‌کنید :

$$۳\sqrt{۵}=\sqrt{۴۵}=۶+\sqrt{۴۵}-۶=۶+\frac{۱}{\frac{\sqrt{۴۵}+۶}{۹}},$$

$$\frac{\sqrt{۴۵}+۶}{۹}=۱+\frac{\sqrt{۴۵}-۳}{۹}=۱+\frac{۴}{\sqrt{۴۵}+۳},$$

$$\frac{\sqrt{۴۵}+۳}{۴}=۲+\frac{\sqrt{۴۵}-۵}{۴}=۲+\frac{۵}{\sqrt{۴۵}+۵},$$

$$\frac{\sqrt{۴۵}+۵}{۵}=۲+\frac{\sqrt{۴۵}-۵}{۵}=۲+\frac{\sqrt{۴۵}-۵}{۵}=۲+\frac{۴}{\sqrt{۴۵}+۵},$$

$$\frac{\sqrt{۴۵}+۵}{۴}=۲+\frac{\sqrt{۴۵}-۳}{۴}=۲+\frac{۹}{\sqrt{۴۵}+۳}$$

$$\frac{\sqrt{۴۵}+۳}{۹}=۱+\frac{\sqrt{۴۵}-۶}{۹}=۱+\frac{۱}{\sqrt{۴۵}+۶},$$

$$\sqrt{۴۵}+۶=۱۲+\sqrt{۴۵}-۶,$$

$$۳\sqrt{۵}=۶+\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱۲+}\ \ldots\ldots;$$

مثال ۲ـ $\sqrt{\frac{۷}{۱۱}}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید. داریم:

$$\sqrt{\frac{۷}{۱۱}}=\frac{۷}{\sqrt{۷۷}},\quad \frac{\sqrt{۷۷}}{۷}=۱+\frac{\sqrt{۷۷}-۷}{۷}=۱+\frac{۴}{\sqrt{۷۷}+۷};$$

$$\frac{\sqrt{۷۷}+۷}{۴}=۳+\frac{\sqrt{۷۷}-۵}{۴}=۳+\frac{۱۳}{\sqrt{۷۷}+۵},$$

$$\frac{\sqrt{۷۷}+۵}{۱۳}=۱+\frac{\sqrt{۷۷}-۸}{۱۳}=۱+\frac{۱}{\sqrt{۷۷}+۸};$$

$$\sqrt{۷۷}+۸=۱۶+\sqrt{۷۷}-۸=۱۶+\frac{۱۳}{\sqrt{۷۷}+۸}$$

$$\frac{\sqrt{۷۷}+۸}{۱۳}=۱+\frac{\sqrt{۷۷}-۵}{۱۳}=۱+\frac{۴}{\sqrt{۷۷}+۵};$$

$$\frac{\sqrt{۷۷}+۵}{۴}=۳+\frac{\sqrt{۷۷}-۷}{۴}=۳+\frac{۷}{\sqrt{۷۷}+۷},$$

$$\frac{\sqrt{۷۷}+۷}{۷}=۲+\frac{\sqrt{۷۷}-۷}{۷}$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{۷}{۱۱}}=\frac{۱}{\underset{*}{۱}+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱۶+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{\underset{*}{۲}+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۱+}\ldots\ldots$$

مثال ۳ـ کسر $\sqrt{۱+\frac{۱}{a}}$، را به کسر مسلسل تبدیل کنید .

$$\sqrt{۱+\frac{۱}{a}}=\frac{\sqrt{a^۲+a}}{a}=۱+\frac{\sqrt{a^۲+a}-a}{a}=۱+\frac{۱}{\sqrt{a^۲+a}+a};$$

$$\frac{\sqrt{a^۲+a}+a}{۱}=۲a+\frac{\sqrt{a^۲+a}-a}{۱}=۲a+\frac{a}{\sqrt{a^۲+a}+a};$$

$$\frac{\sqrt{a^۲+a}+a}{a}=۲+\frac{\sqrt{a^۲+a}-a}{a}=\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad \sqrt{۱+\frac{۱}{a}}=۱+\frac{۱}{۲a+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲a+}\ \frac{۱}{۲}\ \cdots\cdots$$

تمرین

ثابت کنید که :

$$۱-\ \sqrt{۹a^۲+۳}=۳a+\frac{۱}{۲a+}\ \frac{۱}{۶a+}\ \frac{۱}{۲a+}\ \frac{۱}{۶a+}$$

$$۲-\ \sqrt{a^۴+۴a}=a+\frac{۲}{۱+}\ \frac{۱}{a+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{a+}\ \frac{۱}{۱+}$$

$$۳-\ p(a_۱+\frac{۱}{pqa_۲+}\ \frac{۱}{a_۳+}\ \frac{۱}{pqa_۴+}\ \cdots\cdots)=$$

$$=pa_۱+\frac{۱}{qa_۲+}\ \frac{۱}{pa_۳+}\ \frac{۱}{qa_۴+}\ \cdots\cdots$$

۱۳ـ در هرکسر مسلسل داریم $a_۱<a_n+r_n$

چون $a_{n-۱}+a_n=b_{n-۱}r_{n-۱},$

$\therefore\quad a_{n-۱}+a_n=$ یا $>r_{n-۱}$

چون $b_{n-۱}$ صحیح و مثبت است .

$\therefore\quad \sqrt{N}+a_n>r_{n-۱}$

اما $N-a_n^۲=r_nr_{n-۱},$

$\therefore\quad \sqrt{N}-a_n<r_n,$

$\therefore\quad a_۱-a_n<r_n,$

۱۴ـ ثابت کنید که تناوب بادومین خارج قسمت‌جزئی شروع و با خارج قسمت جزئی دوبرابر اولین خارج قسمت ختم می‌شود .

همانطوریکه دربند ۱۲ نشان داده‌شدبازگشت (تکرار) بوجود می‌آید فرض می‌کنیم که خارج $(n+۱)$ام درمرحله $(s+۱)$ام تکرار شودپس:

$a_s=a_n,\qquad r_s=r_n,\qquad b_s=b_n,$

ثابت می‌کنیم که :

$$a_{s-۱}=a_{n-۱}\ ,\ r_{s-۱}=r_{n-۱}\ ,\quad b_{s-۱}=b_{n-۱}$$

برای این منظور می‌نویسیم:

$$r_{s-۱}r_s=N-a_s^۲=N-a_n^۲=r_{n-۱}r_n=r_{n-۱}r_s,$$

$$\therefore\quad r_{s-۱}=r_{n-۱},$$

هم چنین:

$$a_{n-۱}+a_n=b_{n-۱}r_{n-۱}\ \text{و}$$

$$a_{s-۱}+a_s=b_{s-۱}r_{s-۱}=b_{s-۱}r_{n-۱},$$

$$\therefore\quad a_{n-۱}-a_{s-۱}=r_{n-۱}(b_{n-۱}-b_{s-۱}),$$

$$\therefore\quad \frac{a_{n-۱}-a_{s-۱}}{r_{n-۱}}=b_{n-۱}-b_{s-۱}=\{\text{عدد صحیح یا ۰}\}$$

با توجه به بند قبل $a_۱-a_{n-۱}<r_{n-۱}$ و $a_۱-a_{s-۱}<r_{s-۱}$

یعنی $a_۱-a_{s-۱}<r_{n-۱}$ وبنابراین $a_{n-۱}-a_{s-۱}<r_{n-۱}$ و از آنجا کسر فوق کمتر از واحد است پس باید مساوی صفر باشد یعنی $a_{n-۱}=a_{s-۱}$ و $b_{s-۱}=b_{n-۱}$.

از آنجا اگر خارج قسمت کامل $(n+۱)$ام تکرار شود خارج قسمت n ام هم باید تکرار شود و عمل آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا n کمتر از ۲ نباشد بنابراین خارج قسمت کامل مکرر با خارج قسمت دوم $\frac{\sqrt{N}+a_۱}{r_۱}$ شروع می‌شود . ازآنجا نتیجه می‌شود که تکرار با خارج قسمت جزئی دوم $b_۱$ شروع می‌شود .

فرض می‌کنیم $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ خارج قسمت کاملی باشد که بلافاصله بعد از آن $\frac{\sqrt{N}+a_۱}{r_۱}$ مجدداً تکرار می‌شود .

پس این دوعبارت دوخارج قسمت کامل متوالی می‌باشند و داریم :

$$a_n+a_1=r_nb_n, \qquad r_nr_1=N-a_1^2,$$

اما $N-a_1^2=r_1$ و از آنجا $r_n=1$.

هم چنین $a_1-a_n<r_n$ یعنی $a_1-a_n<1$ و از آنجا $a_1-a_n=0$ یعنی $a_n=a_1$. و چون $a_n+a_1=r_nb_n=b_n$ پس : $b_n=2a_1$.

۱۵ـ تعیین تقارب ماقبل آخر کسر مسلسل متناوب .

فرض می‌کنیم n تعداد خارج قسمت‌های جزئی درکسر مسلسل متناوب باشد . پس تقارب ماقبل آخر تناوب‌ها تقاربهای nام ، $2n$ام ، $3n$ام ،...... می‌باشندکه با :

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ و } \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \text{ و } \frac{p_{3n}}{q_{3n}} \text{ و } \dots\dots$$

نمایش می‌دهیم و چون :

$$\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\;\frac{1}{b_2+}\;\frac{1}{b_3+}\;\dots\dots\;\frac{1}{b_{n-1}+}\;\frac{1}{2a_1+}\;\dots\dots$$

بنابراین خارج‌قسمت جزئی‌متناظر با (p_{n+1}/q_{n+1}) مساوی $2a_1$ می‌باشد.

از آنجا :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{2a_1p_n+p_{n-1}}{2a_1q_n+q_{n-1}},$$

خارج قسمت کامل در همان مرحله شامل تناوب :

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\;\frac{1}{b_2+}\;\frac{1}{b_3+}\;\dots\dots+\frac{1}{b_{n-1}+}\;\dots\dots$$

پس مساوی $a_1+\sqrt{N}$ می‌باشد از آنجا :

$$\sqrt{N}=\frac{(a_1+\sqrt{N})p_n+p_{n-1}}{(a_1+\sqrt{N})q_n+q_{n-1}}$$

با طرفین وسطین و معادل قرار دادن ضرایب گویا و اصم از طرفین داریم:

$$a_1p_n+p_{n-1}=Nq_n, \qquad a_1q_n+q_{n-1}=p_n, \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

هم چنین $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ را می‌توان از $\frac{p_n}{q_n}$ و $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ با در نظر گرفتن خارج قسمت :

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\ \frac{1}{b_2+}\ \cdots\cdots\ \frac{1}{b_{n-1}},$$

که مساوی $a_1+\frac{p_n}{q_n}$ می‌باشد بدست آورد پس:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{\left(a_1+\frac{p_n}{q_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\left(a_1+\frac{p_n}{q_n}\right)q_n+q_{n-1}}=\frac{Nq_n+\frac{p_n}{q_n}\cdot p_n}{p_n+\frac{p_n}{q_n}\cdot q_n}\ \cdots\cdots\ (1)$$

$$\therefore\quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n}+\frac{Nq_n}{p_n}\right),\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت نمود که اگر $\frac{p_{cn}}{q_{cn}}$ تقارب ماقبل آخر در دورهٔ تناوب cام باشد داریم :

$$a_1p_{cn}+p_{cn-1}=Nq_{cn},\quad a_1q_{cn}+q_{cn-1}=p_{cn}$$

با کاربرد این معادلات مقادیر $\frac{p_{3n}}{q_{3n}}$ ، $\frac{p_{4n}}{q_{4n}}$ ، ...... را بترتیب می‌توان حساب نمود .

بایدتوجه داشت که معادلهٔ (۲) بازاء تمام مضارب n برقراراست پس:

$$\frac{p_{2cn}}{q_{2cn}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{cn}}{q_{cn}}+\frac{Nq_{cn}}{p_{cn}}\right).$$

مثال ۱ـ اگر

$$x=\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \cdots\cdots$$

$$y=\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\,\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\,\cdots\cdots$$

$$z=\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\,\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\,\cdots\cdots$$

باشد . ثابت کنید

$$x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$$

داریم : $x=\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+x}$ و از آنجا :

$$a_1x^2+a_1a_2x-a_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$2a_1y^2+4a_1a_2y-2a_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$3a_1z^2+9a_1a_2z-3a_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

با حذف a_1، a_2 بین این معادلات نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود .

مثال ۲ـ ثابت کنید :

$$\left(a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\cdots\cdots\right)=\frac{a}{b}$$

اگر کسرها را به ترتیب به x، y نمایش دهیم داریم :

$$x=a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{x} \implies bx^2-abx-a=0,$$

$$y=\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+y} \implies by^2+aby-a=0,$$

پس x و $-y$ ریشه‌های $bt^2-abt-a=0$ می‌باشد و حکم ثابت است .

تمرین

۱ ـ اگر p_n/q_n تقارب nام $\sqrt{a^2+1}$ باشد . ثابت کنید :

$$\frac{p_2^2+p_3^2+\cdots\cdots p_{n+1}^2}{q_2^2+q_3^2+\cdots\cdots q_{n+1}^2}=\frac{p_{n+1}\,p_{n+2}-p_1p_2}{q_{n+1}\,q_{n+2}-q_1q_2}$$

۲ـ اگر $x=y+\frac{1}{2y+}\frac{1}{2y+}\cdots\cdots$ باشد ثابت کنید :

$$y=x-\frac{1}{2x-}\frac{1}{2x-}\cdots\cdots$$

۳ـ ثابت کنید :

$$\left(\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\right)\left(d+\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{d+}\cdots\cdots\right)=$$
$$=\frac{b+d+bcd}{a+c+acd}$$

۱۶ـ کسرهای مسلسل متقارن .

يك کسر مسلسل محدود که در آن خارج قسمتها متساوی‌الفاصله از ابتدا و انتها مساوی می‌باشند **متقارن** گفته می‌شوند برای مثال :

$$\frac{247}{77}=3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3}$$ و

$$\frac{425}{132}=3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3}$$

متقارنند که اولی دارای تعداد خارج قسمت فرد و دومی زوج می‌باشد .

خاصیت زیر مهمترین خواص این کسرها می‌باشد .

اگر فرض کنیم

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_r},$$
$$\frac{P}{Q}=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_r+}\frac{1}{a_r+}\frac{1}{a_{r-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_1},$$

p/q ، P/Q کسرساده می‌باشند و اگر p'/q' و P'/Q' تقارب‌های بلافاصله قبل از p/q ، P/Q باشد در این‌صورت :

$$P=p^2+p'^2;\quad Q'=q^2+q'^2,\quad Q^2+1=PQ'\ .$$

از معادلات (A) بند ۶ داریم :

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{p_{n-1}/p_{n-2}},\qquad \frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{q_{n-1}/q_{n-2}}$$

باتبدیل‌مقدار n به۲.....,$n-۲$,$n-۱$ درکسراول و۳.....,$n-۲$,$n-۱$ درکسر دوم : $p_۱/p_۰=a_۱$ و $p_۲/q_۱=a_۲$ داریم :

$$\frac{p_n}{p_{n-۱}}=a_n+\frac{۱}{a_{n-۱}+}\ \frac{۱}{a_{n-۲}+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_۲+}\ \frac{۱}{a_۱},$$

$$\frac{p_n}{q_{n-۱}}=a_n+\frac{۱}{a_{n-۱}+}\ \frac{۱}{a_{n-۲}+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_۲},$$

نتیجه می‌شودکه‌اگر p_r/q_r ، p'_r/q'_r به‌ترتیب تقاربهای nام درکسرهای زیر باشد :

$$a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_n}\qquad a_n+\frac{۱}{a_{n-۱}+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_۱},$$

که درکسر دوم خارج قسمتها به ترتیب عکس می‌باشند ، پس :

$$p'_n=p_n,\quad q'_n=p_{n-۱},\quad p'_{n-۱}=q_n,\quad q'_{n-۱}=q_{n-۱},$$

چون باتوجه به‌قبل $p'_n/q'_n=p_n/p_{n-۱}$ و $p'_{n-۱}/q'_{n-۱}=q_n/q_{n-۱}$ و همانطوریکه در بند ۶ گفته شدکسرهای ساده می‌باشند .

بنابراین $P/P'=P/Q$ و ازآنجا $P'=Q$ و همچنین :

$$\frac{p}{p'}=a_r+\frac{۱}{a_{r-۱}+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_۱},\qquad \frac{q}{q'}=a_r+\frac{۱}{a_{r-۱}+}\ \cdots\cdots\ \frac{۱}{a_۲}$$

و بنابراین :

$$\frac{P}{Q}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\cdots\cdots\frac{۱}{a_r+}\ \frac{p'}{p}=\frac{p^۲+p'^۲}{pq+p'q'}$$

$$\frac{P'}{Q'}=a_۱+\frac{۱}{a_۲+}\cdots\cdots\frac{۱}{a_r+}\ \frac{q'}{q}=\frac{pq+p'q'}{q^۲+q'^۲}$$

اگر $X=p^۲+q^۲$ و $Y=pq+p'q'$ باشد داریم :

$$Yp-Xq=(-۱)^rp' \text{ و } Xq'-Yp'=(-۱)^rp\,.$$

هرمقسوم‌علیه X،Y مقسوم علیه p،p' (که نسبت بهم اولند) می‌باشد.

پس X/Y ساده ودر نتیجه $P=X$ ، $Q=Y$ و بالاخره $P=p^{2}+p'^{2}$ و $Q=q^{2}+q'^{2}$ و بعلاوه $PQ'-P'Q=(-1)^{2r}$ و $P'=Q$ پس $Q^{2}+1=PQ'$.

۱۷ـ اگر Q عدد صحیح و مثبت باشد هرفاکتور از $Q^{2}+1$ را می‌توان بصورت مجموع دومربع کامل بیان کرد .

فرض می‌کنیم $Q^{2}+1=PR$ $(P>R)$ واضح است که $P>Q$ و P نسبت به Q اول‌است. اگر:

$$\frac{P}{Q}=a_{1}+\frac{1}{a_{2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{2r}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

و P'/Q' تقارب بلافاصله قبل از P/Q باشد ، داریم :

$PQ'-P'Q=1=PR-Q^{2}$ بنابراین $P(R-Q')=Q(Q-P')$

و چون P نسبت به Q اول است و $P>Q$ پس $Q=P'$ و $R=Q'$ و در نتیجه :

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{P'}=a_{2r}+\frac{1}{a_{2r-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{2}+}\frac{1}{a_{1}}$$

و در نتیجه $a_{2r}=a_{1}$ و $a_{2r-1}=a_{2}$ و ..... وکسر مسلسل متقارن است .

اگر تقارب mام (A) را به p_{m}/q_{m} نمایش دهیم داریم :

$$P=p_{r}^{2}+p_{r-1}^{2} \quad \text{و} \quad R=Q'=q_{r}^{2}+q_{r-1}^{2};$$

۱۸ـ برعکس اگر $P=x^{2}+y^{2}$, و ($y>x$ نسبت بهم اول باشند)یك عدد صحیح Q را طوری می‌توان پیدا کرد که $Q^{2}+1$ بر P بخش پذیر باشد .

اگر فرض کنیم

$$\frac{x}{y}=a_{r}+\frac{1}{a_{r-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{1}},$$

$$\frac{X}{Q}=a_{1}+\frac{1}{a_{2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{r}+}\frac{1}{a_{r}+}\frac{1}{a_{r-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{1}}$$

بنابراین اگر p_m/q_m تقارب mام کسر مسلسل اخیر باشد :

$X = p_r^{۲} + p_{r-۱}^{۲} = x^{۲} + y^{۲} = P$ و $Q = p_{۲r-۱}$ و همچنین

$Xq_{۲r-۱} - Qp_{۲r-۱} = ۱$ و درنتیجه $Q^{۲} + ۱ = Pq_{۲r-۱}$.

مثال ـ می‌دانیم $۳۶۳۷ = ۴۶^{۲} + ۳۹^{۲}$ مطلوبست یك جواب مثبت و صحیح معادلهٔ $x^{۲} + ۱ = ۳۶۳۷y$

داریم : $\frac{۴۶}{۳۹} = ۱ + \frac{۱}{۵+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۳}$، و کسر مسلسل زیر را می‌نویسیم :

$$۳ + \frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۵+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۵+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۳},$$

که دو تقارب آخر آن $\frac{۱۰۲۷}{۲۹۰}$ و $\frac{۳۶۳۷}{۱۰۲۷}$ می‌باشد و داریم :

$۳۶۳۷ \times ۲۹۰ - ۱۰۲۷^{۲} = ۱$؛ بنابراین جواب مطلوب (۲۹۰ و ۱۰۲۷) می‌باشد .

۱۹ ـ اگر x نسبت به y اول باشد هرفاکتور $x^{۲} + y^{۲}$ مجموع دومربع است .

چون می‌توان عدد صحیح Q راطوری پیداکرد که $x^{۲} + y^{۲}$ فاکتوری از $Q^{۲} + ۱$ و هر فاکتور از $Q^{۲} + ۱$ مجموع دومربع است .

تمرین

اگر P ، Q ، R اعداد صحیح و مثبت بطوریکه $Q^{۲} - ۱ = PR$ و $P > R$ باشد ، ثابت‌کنید P/Q را می‌توان بفرم

$$\frac{P}{Q} = a_۱ + \frac{۱}{a_۲ +} \cdots\cdots \frac{۱}{a_{r-۱} +}\,\frac{۱}{a_r +}\,\frac{۱}{a_{r-۱} +} \cdots\cdots \frac{۱}{a_۲ +}\,\frac{۱}{a_۱},$$

و اگر p_m/q_m تقارب mام باشد. ثابت‌کنید :

و $P = p_r(p_r + p_{r-۲})$, $\quad Q = p_r q_{r-۱} + p_{r-۱} q_{r-۲}$

$$R = q_{۲r} = q_{r-۱}(q_r + q_{r-۲})$$

مثال عددی : $P = ۳۳$ ، $Q = ۲۳$

فصل ۳

معادلات دیوفانتی (سیال)

معادلات سیال (دیوفانتی[1])

۱ـ تعریف ـ اگر در یك دستگاه یا معادله تعداد مجهولات بیشتر ازتعداد معادلات باشد معمولا بینهایت جواب وجود دارد و آنها را معادلات سیال می‌نامند که در این‌کتاب به ذکر نوعهای مختلفی از آن می‌پردازیم :

معادلات درجه اول

۲ـ معادلهٔ $ax+by=c$ که ساده‌ترین نوع معادلهٔ سیال می‌باشد .

برای بدست‌آوردن جوابهای صحیح آن فرض می‌کنیم $\alpha,\beta\in N^*$ [که در آن $N^*=\{۱,۲,۳,......\}$ مجموعهٔ اعداد درست طبیعی می‌باشد] دو مقدار از $x,y\in Z$ باشد در این‌صورت :

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c, \\ a\alpha+b\beta=c, \end{array}\right\}$$

۱ـ Diophantine ریاضی‌دان یونانی که اولین بار معادلات سیال را موردبررسی قرارداد و در اواخر قرن چهارم میزیسته است .

از تفریق دومعادله داریم :

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0, \Longrightarrow y=\beta-\frac{a}{b}(x-\alpha).$$

a و b نسبت بهم اولند (برای اطلاع بیشتر به کتاب روشهای جبر تألیف پرویز شهریاری رجوع شود) پس برای اینکه $y\in Z$ باشد لازم است که $(x-\alpha)/b=t\in Z,$ و ازآنجا $x=\alpha+bt$ و $y=\beta-at$.

مثال ۱ـ حل معادلهٔ $۷x+۱۲y=۲۲۰,$

طرفین معادله را برضریب کوچکتر ۷ تقسیم می‌کنیم خواهیم داشت :

$$x+y+\frac{۵y}{۷}=۳۱+\frac{۳}{۷};$$

$$\therefore \quad x+y+\frac{۵y-۳}{۷}=۳۱; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

چون y،x هردوعدد صحیح می‌باشند پس باید $(۵y-۳)/۷$ نیز عددصحیح باشد .

$$\frac{۵y-۳}{۷}=\text{عدد صحیح}$$

$$\frac{۱۵y-۹}{۷}=\text{عدد صحیح}$$

(۳ ضرب شده و ۷ نسبت بهم اولند)

$$۲y-۱+\frac{y-۲}{۷}=\text{عدد صحیح}=p$$

$$y-۲=۷p; \Longrightarrow y=۷p+۲;$$

با قراردادن این مقدار y در معادلهٔ اصلی داریم : $x=۲۸-۱۲p$

که ازاین‌دسته جوابها، جوابهای موردنظررا درحدود دلخواه می‌توان‌اختیار نمود .

مثال ۲ـ حل معادلهٔ $۱۴x-۱۱y=۲۹,$

طرفین را برضریب کوچکتر ۱۱ تقسیم می‌کنیم :

$$x+\frac{۳x}{۱۱}-y=۲+\frac{۷}{۱۱}$$

$$\therefore\ \frac{۳x-۷}{۱۱}=۲-x+y=\text{عدد صحیح}$$

$$\frac{۱۲x-۲۸}{۱۱}=\text{عدد صحیح}$$

$$x-۲+\frac{x-۶}{۱۱}=\text{عدد صحیح}$$

$$\therefore\ \frac{x-۶}{۱۱}=\text{عدد صحیح}=p,$$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l} x=۱۱p+۶ \\ y=۱۴p+۵ \end{array}\right\}$$

۳ـ دومعادله با سه مجهول

۱ـ فرمول عمومی جوابهای صحیح و تماماً مثبت دستگاه را درصورت وجود می‌توان طبق روش‌های زیر محاسبه نمود :

مثال ۱ـ مطلوبست تمام جوابهای صحیح و مثبت زوج معادلات :

$$۲x-۲y+۳z=۷; \qquad -۴x+۷y+۳z=۱۹;$$

با حذف یك مجهول مثلاً (z) داریم $۲x-۳y=-۴$; که جوابهای عمومی وصحیح آن عبارتنداز $x=۳m-۲$ و $y=۲m$ $(m=۰,\pm۱,\pm۲,\ldots)$
با قراردادن مقادیر x،y در یکی از معادلات مفروض خواهیم داشت :
$۲m+۳z=۱۱;$ و جوابهای عمومی وصحیح آن عبارتند از :

$$m=۴-۳t; \qquad z=۱+۲t \implies$$

$$x=۳m-۲=۱۰-۹t; \qquad y=۲m=۸-۶t;$$

تنها مقادیری از t که بازاء آن x،y،z مثبت می‌شوند عبارتند از : $(۰،۱)$ وازآنجا جوابهای مثبت و درست عبارتنداز $(۱,۸,۱۰)$ و $(۳,۲,۱)$؛
۲ـ اگر $\alpha,\beta,\gamma\in Z$،]که درآن $Z=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}$ می‌باشد[یك جواب دستگاه

$$ax+by+cz=d, \qquad a'x+b'y+c'z=d',$$

باشد جوابهای عمومی صحیح آنرا بدست آورید .

اولاً ـ اگر $(bc')\neq \circ$ و $(ca')\neq \circ$ و $(ab')\neq \circ$ باشد معادلات را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$ax+by+cz=d, \qquad a'x+b'y+c'z=d,$$

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=d, \qquad a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=d,$$

$$\left.\begin{aligned} a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=\circ, \\ a'(x-\alpha)+b'(y-\beta)+c'(z-\gamma)=\circ, \end{aligned}\right\}$$

از دومعادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که :

$$\frac{x-\alpha}{bc'-b'c}=\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'};$$

که برای اختصار می‌توان آنرا چنین نوشت :

$$\frac{x-\alpha}{(bc')}=\frac{y-\beta}{(ca')}=\frac{z-\gamma}{(ab')} \quad \cdots\cdots\cdots (A)$$

هر جزء معادلهٔ (A) را به t/f نمایش می‌دهیم (که در آن $t\in Z$ و f عدد صحیحی است که بعداً انتخاب می‌شود) پس :

$$x-\alpha=(bc')t/f, \quad y-\beta=(ca')t/f, \quad z-\gamma=(ab')t/f,$$

بنابراین x،y،z بازاء جمیع مقادیر t، فقط اگر f یك فاکتورمشترك (bc')، (ca') و (ab') باشد عدد صحیحند .

چون هر فاکتور مشترك از این اعداد یك فاکتور از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك می‌باشد ازآنجا تمام جوابهای صحیح عبارتند از :

$$\frac{x-\alpha}{(bc')}=\frac{y-\beta}{(ca')}=\frac{z-\gamma}{(ab')}=\frac{t}{g},$$

که درآن g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك (bc') ، (ca') و (ab') و $t\in Z$ می‌باشد .

اگر $(bc')=\circ$ باشد خواهیم داشت :

$$x=\alpha, \qquad \frac{y-\beta}{(ca')}=\frac{z-\gamma}{(ab')}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که جوابهای عمومی صحیح عبارتند از :

$$x=\alpha, \qquad \frac{y-\beta}{(ca')}=\frac{z-\gamma}{(ab')}=\frac{t}{g_۱},$$

که درآن $g_۱$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك (ca') ، (ab') می‌باشد .

۴ـ معادله‌ای بفرم $ax+by+cz+\dots\dots=d,$

(۱) اگر $\{a,b,c,\dots\dots\in N\}$ تمام جوابهای صحیح و مثبت معادله را طبق روش زیر می‌توان بدست‌آورد :

مثال۱ـ جوابهای صحیح ومثبت معادله $۷x+۱۱y+۲۶z=۱۲۳$ را بدست آورید .

بزرگترین ضریب ۲۶ می‌باشد $۷+۱۱+۲۶z\leqslant۱۲۳,$ پس :

$z\leqslant۴$ و از آنجا :

$$z=۱; \implies ۷x+۱۱y=۹۷, \implies x=۶; \quad y=۵$$

$$z=۲; \implies ۷x+۱۱y=۷۱, \implies x=۷; \quad y=۲$$

که بازاء دومقدار دیگرمعادله دارای جواب نیست. پس دودسته جواب عبارتست از (۱,۵,۶) و (۲,۲,۷) .

مثال ۲ـ مطلوبست محاسبهٔ تمام جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ :

$$۳x_۱+۴x_۲+۷x_۳+۱۱x_۴=۶۷,$$

در این‌جا $۱۱x_۴\leqslant۶۷-(۳+۴+۷);$ و بنابراین $x_۴<۵$ وداریم :

$x_۴=۴,\ \ x_۳=۱;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۱۶; \implies x_۱=۴; \quad x_۲=۱;$

$x_۳=۲;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۹;$ جواب نداریم

$x_۴=۳;\ \ x_۳=۱;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۲۷; \implies x_۱=۵;۱; \ \ x_۲=۳;۶;$

$x_۳=۲;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۲۰; \implies x_۱=۴; \quad x_۲=۲;$

$x_۳=۳;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۱۳; \implies x_۱=۳; \quad x_۲=۱;$

$x_۳=۴;\ \ ۳x_۱+۴x_۲=۶;$ جواب نداریم

با امتحان $x_4=2;1$ با روش فوق جمعاً ۲۸ جواب بدست می‌آوریم.

(۲)ـ اگر $\{\alpha,\beta,\gamma\in Z\}$ یك جواب معادله $ax+by+cz=d,$ $\{a,b,c,d\in Z^*\}$ باشد **جوابهای دیگر** عبارتند از :

$$x=\alpha+bw-cv;\quad y=\beta+cu-aw;\quad z=\gamma+av-bu,$$

که درآن u و v و w مقادیر اختیاری و درست می‌باشند .

با قرار دادن مقادیر γ،β،α در معادله وکم‌کردن و جایگزین‌کردن Z،Y،X بجای $x-\alpha$، $y-\beta$ و $z-\gamma$ خواهیم داشت :

$$aX+bY+cZ=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

فرض می‌کنیم a و b نسبت‌بهم اول باشند بنابراین اعداد صحیح u و v را طوری می‌توان پیدا کرد که داشته باشیم :

$$av-bu=Z,$$

بنابراین اگر مقادیرصحیح Z،Y،X طوری هستند که درمعادلهٔ (A) صادقند پس :

$$a(X+cv)+b(Y-cu)=aX+bY+cZ=0,$$

و چون a و b نسبت بهم اولند پس بایستی :

$$X+cv=bw,\qquad\qquad Y-cu=-aw$$

مثال ۱ـ اگر (p_1,p_2,p_3,p_4) یك جواب معادلهٔ : $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=e$ باشد ثابت‌کنید سایر جوابها عبارتند از

$$x_1=p_1+bw-cv-du',$$
$$x_2=p_2+cu-dv'-aw,$$
$$x_3=p_3+dw'+av-bu,$$
$$x_4=p_4+au'+bv'-cw',$$

که درآن $\{u,v,w,u',v',w'\in Z\}$.

مثال ۲ـ اگر $ax+by+c=0,$ و $a'x+b'y+c'=0$ و x عدد صحیحی باشد ثابت‌کنید که y نیز عدد صحیحی است . **بجز وقتی‌که**

b و b' هردو بر $ab'-a'b$ بخش‌پذیر باشند.

چون $a(bc')+b(ca')+c(ab')=0,$ و

$$a'(bc')+b'(ca')+c'(ab')=0$$

تمرین

۱ـ مطلوبست جوابهای صحیح و مثبت معادلات :

$(۱)\ \ 7x+15y=59,\qquad (۲)\ \ 8x+13y=138$

$(۳)\ \ 7x+9y=102,\qquad (۴)\ \ 15x+71y=10653,$

۲ـ مطلوبست جواب عمومی معادلات :

$(۱)\ \ 7x-13y=15,\qquad (۲)\ \ 9x-11y=4,$

$(۳)\ \ 119x-105y=217,\qquad (۴)\ \ 49x-69y=100,$

۳ـ مطلوبست جوابهای صحیح و مثبت معادلات :

$$(۱)\ \left.\begin{array}{l} x+3y-4z=8,\\ 2x+y+3z=39,\end{array}\right\}\qquad (۲)\ \left.\begin{array}{l} 7x+11y+13z=201,\\ 11x+13x+7z=209,\end{array}\right\}$$

$$(۳)\ \left.\begin{array}{l} 5x+y+7z=39,\\ 2x+4y+9z=63,\end{array}\right\}\qquad (۴)\ \left.\begin{array}{l} 3x+2y+3z=250\ ,\\ 9x-4y+5z=170\ ,\end{array}\right\}$$

$(۵)\ \ 9x+16y+25z=109,\ (۶)\ \ 17x+25y+23z=270,$

$(۷)\ \ 2x+4y+9z=63,\qquad (۸)\ \ 9x-4y+5z=170,$

۴ـ اگر $a_1,a_2,\ldots\ldots a_n$ همگی اعداد صحیح و

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})\,(1-x^{a_2})\ldots\ldots(1-x^{a_n})}=1+A_1x+\ldots\ldots+A_nx^n+\ldots\ldots$$

باشد ، ثابت‌کنید تعداد جوابهای مثبت وصحیح (بانضمام صفر) معادله $a_1x_1+a_2x_2+\ldots\ldots+a_nx_n=m,$ برابر A_m می‌باشد وتعدادجوابهای معادله $x+2y=n$ برابر $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}$ می‌باشد .

معادلات درجه دوم

۵ــ مطالعهٔ اعداد بفرم $x^2+axy+by^2$:

اعداد بفرم m^2+n^2 دارای یك خاصیت قابل توجه می‌باشد که در مورد حل معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$, بکار می‌رود. این خاصیت توسط اتحاد زیر بیان می‌شود :

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2)=(mp+nq)^2+(mq-np)^2$$
$$=(mp-nq)^2+(mq+np)^2; \quad \text{..........} \quad (I)$$

یعنی: هرگاه دوعدد که هرکدام مجموع دومربعند درهم ضرب کنیم حاصل نیز عددی است که مجموع دومربع می‌باشد .

عباراتی که درنظیرخود ضرب شوند حاصل دارای فرم دیگری مشابه فرمهای قبل باشد سایه‌دار نامیده می‌شوند .

هرگاه در این اتحاد فرض کنیم $p=m$ و $q=n$ داریم :

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2.$$

حال جوابهای معادلهٔ فیثاغورث[1] $x^2+y^2=z^2$ را بکمك اتحاد فوق بدست می‌آوریم :

$$x=m^2-n^2, \qquad y=2mn, \qquad z=m^2+n^2.$$

که بسهولت می‌توان ثابت نمود .

اولاً ــ یکی از اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه مضربی است از ۳

ثانیاً ــ « « « « « « « « ۴

ثالثاً ــ یکی از سه عدد فیثاغورثی مضربی از ۵

با توجه به رابطهٔ :

$$(m^2+n^2)^3=(m^2+n^2)^2(m^2+n^2)=$$
$$=[(m^2-n^2)^2+(2mn)^2][m^2+n^2]$$
$$=(m^3+mn^2)^2+(m^2n+n^3)^2=$$
$$=(m^3-3mn^2)^2+(3m^2n-n^3)^2;$$

۱ــ راه حل دیگری از این معادله درکتاب روشهای جبر مندرج است .

برای معادله $x^2+y^2=z^3$ دودسته جواب زیر را بدست می‌آوریم :

$$x=m^3+mn^2,\qquad y=m^2n+n^3,\qquad z=m^2+n^2,$$
$$x=m^3-3mn^2,\qquad y=3m^2n-n^3,\qquad z=m^2+n^2,$$

برای مثال بازاء $m=2$ و $n=1$ داریم :

$$2^2+11^2=5^3 \quad \text{و} \quad 10^2+5^2=5^3$$

بطریق‌مشابه با دو پارامترمی‌توان‌تمام‌جوابهای صحیح معادله $x^2+y^2=z^k$ $(k\in N^*)$ را بدست آورد .

باتوجه به معادلهٔ I بند ۵ می‌توان یك جواب صحیح معادله :

$$x^2+y^2=u^2+v^2;$$

را با چهار پارامتر بدست آورد :

$$x=mp+nq,\qquad y=mq-np,$$
$$u=mp-nq,\qquad v=mq+np.$$

برای مثال بازاء $m=3,$ و $n=2$ و $p=2$ و $q=1$ جواب خصوصی زیر را داریم :

$$8^2+1^2=4^2+7^2;$$

فرمهای گوناگونی وجود داردکه واجد خاصیت فوق می‌باشند (خاصیت حاصلضرب) از آن جمله :

$$(m^2+amn+bn^2)(p^2+apq+bq^2)=r^2+ars+bs^2, \quad (2)$$

که درآن $r=mp-bnq,\qquad s=np+mq+anq.$

تمرین

۱ـ مطلوبست یك جواب با دو پارامتر هریك از معادلات :

(۱) $x^2+axy+by^2=z^2,$ (۲) $x^2+axy+by^2=z^3.$

(۳) $x^2+axy+by^2=z^k$ $(k\in N^*)$

(۴) $x^2+y^2=z^2+1;$

۲ـ ثابت کنید :

$$(m^2+amn+n^2)(p^2+apq+q^2)=r^2+ars+s^2,$$

که درآن r و s را می‌توان از دوسری مقادیر زیر بدست‌آورد :

$$r=mp-nq, \qquad s=np+mq+anq.$$
$$r=mq-np, \qquad s=nq+mp+anp.$$

۳ـ مطلوبست یك جواب با چهار پارامتر معادله :

$$x^2+axy+y^2=u^2+auv+v^2.$$

۴ـ مطلوبست یك جواب با شش پارامتر معادلهٔ :

$$x^2+axy+y^2=u^2+auv+v^2=z^2+azt+t^2.$$

۶ـ معادلهٔ دیوفانتی :

$$x^4+y^4=z^2; \quad \text{.......} \quad (۱)$$

دارای جواب صحیحی که $xy\neq 0$ نمی‌باشد .

چون قوای x ، y ، z در معادلهٔ (۱) زوج می‌باشند ، بنابراین فقط جوابهای صحیح و مثبت را در نظر می‌گیریم . اگر x ، y ، z یك جواب و $d=(x,y)$ در این صورت $d^2|z$ و $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d^2}\right)$ با شرط $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right)=1$ یك جواب می‌باشد . در نتیجه می‌توان فرض نمود که $x_1,y_1,z_1\in N^*$ با شرط : $(x_1,y_1)=1$ یك جواب است که درآن x_1 فرد و y_1 زوج است اعداد صحیح x_1 ، y_1 هردو نمی‌توانند فرد باشند زیرا در اینصورت الزاماً $z_1^2\equiv 2 \pmod{4}$ که غیرممکن است . از رابطهٔ :

$$x_1^4+y_1^4=z_1^2,$$

با توجه به جواب معادلهٔ فیثاغورث نتیجه می‌شود که :

$$x_1^2=a^2-b^2, \qquad y_1^2=2ab \qquad z_1=a^2+b^2,$$

که درآن اعداد صحیح a،b طوری‌اند که $(a,b)=1$ و $a>b>0$ می‌باشد.

پس :

$$x_1^2+b^2=a^2, \quad \text{.......} \quad (۲)$$

با توجه به جواب معادلهٔ فیثاغورث داریم :

$$x_1=p^2-q^2,\qquad b=2pq,\qquad a=p^2+q^2,$$

که درآن $(p,q)=1$ و $p>q>0$ و p، q ازپاریته‌های مختلف می‌باشند (یکی زوج و دیگری فرد است) در نتیجه :

$$y_1{}^2=2ab=4pq(p^2+q^2), \quad\text{.......................}\quad (3)$$

چون p، q و p^2+q^2 به دو نسبت بهم اولند و درنتیجه :

$$p=x_2{}^2,\quad q=y_2{}^2,\quad p^2+q^2=z_2{}^2,$$

که درآن $x_2>0$ و $y_2>0$ و $z_2>0$ و $(x_2,y_2)=1$ و درنتیجه که:

$$x_2{}^4+y_2{}^4=z_2{}^2$$

اما $$z_1=a^2+b^2=(p^2+q^2)^2+b^2=z_2{}^4+b^2>z_2{}^4.$$

بنابراین $z_2<z_1{}^{\frac{1}{4}}$ از آنجا از جوابهای صحیح و مثبت مفروض $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ معادلهٔ (۱) جوابهای صحیح و مثبت جدید $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ با شرط $z_2<z_1$ حاصل می‌شود این جوابهای دوم ما را به جوابهای سوم $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ می‌رسانند که $z_3<z_2<z_1,$ اگر عمل را بهمین ترتیب ادامه دهیم رشتهٔ نزولی نامحدودی از اعداد مثبت حاصل می‌شوند که $z_1>z_2>z_3>z_4\cdots\cdots$ وچون‌این غیرممکن است زیرا دنبالهٔ اعداد صحیح محدوداست پس معادلهٔ (۱) دارای‌جواب صحیحی نیست‌که برای‌آن $xy\neq 0$

ایدهٔ اثبات فوق با کاربرد رشتهٔ نزولی نامحدود از ابتکارات فرما می‌باشد و روش تنزل **نامحدود** نامیده می‌شود که در بسیاری از معادلات دیوفانتی و دیگر مسائل تئوری اعدادبکار می‌رود .

تمرین

ثابت‌کنید باشرط $xy\neq 0$ معادلات زیر دارای جواب نمی‌باشند :

۱- $x^4+4y^4=z^2,$

۲- $x^4+2y^4=z^2,$

۳- $x^4+y^4=2z^2,$

۴- $x^4-y^4=2z^2,$

۵- $2x^4-y^4=z^2,$

۶- $x^4\pm 8y^4=z^2,$

۷ـ ثابت کنید دستگاه دیوفانتی:

$$x^2+y^2=z^2, \qquad y^2+z^2=t^2, \quad \ldots\ldots (1)$$

که معادل با :

$$t^2+x^2=2z^2, \qquad t^2-x^2=2y^2, \quad \ldots\ldots (2)$$

می‌باشد که دارای جواب نیست .

فرض کنیم x_1، y_1، z_1، t_1 یك جواب باشد چون $t_1>x_1$ فرض می‌کنیم $t_1=x_1+2\alpha$, باقراردادن درمعادلات باتوجه باینکه اعداد $x_1+\alpha$، α، z_1 نسبت بهم اولند خواهیم داشت :

$$\alpha=r^2-s^2, \qquad x_1+\alpha=2rs,$$
$$\alpha=2rs, \qquad x_1+\alpha=r^2-s^2,$$

و از معادلهٔ دوم داریم :

$$t_1^2-x_1^2=(t_1-x_1)(t_1+x_1)=2\alpha\cdot 2(x_1+\alpha)=8rs(r^2-s^2);$$
$$\therefore \qquad 4rs(r^2-s^2)=y_1^2$$

برای برقراری این معادله باید $r=u^2$ و $s=v^2$ و $r^2-s^2=w^2$ ازآنجا:

$$w^2=r^2-s^2=(r-s)(r+s)=(u^2-v^2)(u^2+v^2)$$

چون $r-s$ و $r+s$ مقسوم علیه مشترکی جز ۱ و ۲ نمی‌توانند داشته باشند داریم :

$$u^2-v^2=2w_2^2, \qquad u^2+v^2=2w_1^2, \quad \ldots\ldots (4)$$
$$u^2-v^2=w_2^2 \qquad u^2+v^2=w_1^2,$$

معادلهٔ اخیر بصورت زیر می‌باشد .

$$w_1^2-w_2^2=2v^2, \qquad w_1^2+w_2^2=2u^2, \quad \ldots\ldots (5)$$

که بصورت معادلات (۲) می‌باشند . این معادلات را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$t_2^2+x_2^2=2z_2^2, \qquad t_2^2-x_2^2=2y_2^2,$$

ولی $t_1=2rs+r^2-s^2>2s^2+r^2-s^2=r^2+s^2=u^4+v^4,$

در نتیجه $u<t_1$ و

$$w_1^2 \leqslant w^2 \leqslant r+s < r^2+s^2, \implies w_1 < t_1$$

و در نتیجه $t_2 < t_1$ و $t_2 < t$ و باتوجه به بند ۶ ثابت می‌شود که مسئله جواب ندارد .

نتیجه۱ ـ دستگاه زیر نمی‌تواند دارای ریشهٔ صحیح باشد :

$$u^2+v^2=w^2, \qquad uv=2p^2$$

یعنی سطح مثلث فیثاغورث نمی‌تواند مربع یك عدد صحیح باشد.

نتیجه ۲ ـ معادلهٔ $x^4-y^4=z^2$ نمی‌تواند دارای جواب صحیح باشد .

طرفین را در x^2y^2 ضرب می‌کنیم خواهیم داشت :

$$(x^4-y^4)x^2y^2=x^2y^2z^2,$$

ولی

$$(2x^2y^2)^2+(x^4-y^4)^2=(x^4+y^4)^2,$$

سطح مثلث فیثاغورث $(x^4-y^4)(x^2y^2)$ مربع کامل شده است که غیرممکن است .

۸ـ بررسی معادله $x^2-Dy^2=z^2$ که درآن $D\in N$

با استفاده از اتحاد :

$$(m^2+Dn^2)^2-D(2mn)^2=(m^2-Dn^2)^2.$$

جوابهای معادله عبارتند از :

$$x=m^2+Dn^2, \qquad y=2mn, \qquad z=(m^2-Dn^2),$$

کافی است که بازاء هرعدد دلخواه n عدد m را طوری انتخاب کنیم که $m^2>Dn^2$ باشد .

۹ـ a بررسی‌معادلهٔ $x^2-Ny^2=1$.

فرض می‌کنیم $\sqrt{N}$ بصورت کسرهای مسلسل نوشته شده باشد و $\frac{p}{q}$ ، $\frac{p'}{q'}$ ، $\frac{p''}{q''}$ سه تقارب متوالی باشد اگر $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ خارج قسمت کامل متناظر با $\frac{p''}{q''}$ باشد پس :

$$r_n(pq'-p'q)=Nq'^2+p'^2,$$ بند ۱۲ فصل کسرهای مسلسل

$\frac{p'}{q'}$ تقارب ماقبل‌آخر از دورهٔ تناوب می‌باشد .

اگر تعداد خارج قسمتها درپریود زوج باشد، $\frac{p'}{q'}$ یك تقارب زوج و بنابراین بزرگتر از $\sqrt{N}$ و بزرگتر از $\frac{p}{q}$ و درنتیجه $p'q-pq'=1$ در این حالت $p'^2-Nq'^2=1$ و درنتیجه $x=p'$ و $y=q'$ یك جواب معادله $x^2-Ny^2=1$ می‌باشد .

چون p'/q' تقارب ماقبل آخر هر دوره گردش می‌باشد پس تعداد جوابها بی‌نهایت می‌باشد .

اگر تعداد خارج قسمت‌ها در دورهٔ تناوب فرد باشد تقارب ماقبل‌آخر در اولین دورهٔ تناوب یك تقارب فرد است . اما تقارب ماقبل‌آخر در دومین دورهٔ تناوب یك تقارب زوج است .

بنابراین‌جوابهای صحیح باگذاردن $x=p'$ ، $y=q'$ حاصل می‌شوند که درآن p'/q' تقارب ماقبل‌آخر در دومین، چهارمین ، ششمین،..... دورهٔ تناوب می‌باشد و ازآنجا در این حالت نیز تعداد جوابها بی‌نهایت است .

b ـ محاسبهٔ یك جواب مثبت وصحیح معادلهٔ $x^2-Ny^2=-1$

مشابه قبل داریم :

$$p'^2-Nq'^2=p'q-pq'.$$

اگر تعداد خارج قسمتها در دورهٔ تناوب فرد باشد و اگر $\frac{p'}{q'}$ یك‌تقارب‌فرد ماقبل‌آخر در هردورهٔ تناوب باشد $\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$ و بنابراین $p'q-pq'=-1$

در این حالت $p'^2-Nq'^2=-1$, و جوابهای صحیح معادله $x^2-Ny^2=-1$ باگذاردن $x=p'$ ، $y=q'$ حاصل می‌شودکه درآن $\frac{p'}{q'}$ تقارب ماقبل آخر در اولین ، سومین ، پنجمین و ...... دورهٔ تناوب می‌باشد .

مثال ۱ـ مطلوبست جوابهای صحیح و مثبت $x^{2}-13y^{2}=\pm 1$

داریم $\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+6}\ \ldots\ldots$

در اینجا تعداد خارج قسمتها در دورهٔ تناوب فرد است و تقارب ماقبل آخر در اولین دورهٔ گـردش $\frac{18}{5}$ می‌باشد ، از آنجا $y=5$ و $x=18$

جواب:

$$x^{2}-13y^{2}=-1,$$

می‌باشد. باتوجه به‌بند ۱۴ کسرهای مسلسل تقارب ماقبل‌آخر در دورهٔ تناوب دوم مساویست با :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+\frac{5}{18}\times 13\right)\Longrightarrow\frac{649}{180},$$

و ازآنجا $x=649$ و $y=180$ جواب معادله $x^{2}-13y^{2}=1$ می‌باشد.

باتشکیل تقارب‌های متوالی ماقبل‌آخر دورهٔ تناوبها می‌توان هرتعداد جواب معادلات $x^{2}-13y^{2}=\pm 1$ را بدست آورد .

مثال ۲ـ مطلوبست تعیین دوعدد x و y بطوریکه بین d بزرگترین مقسوم علیه مشترك و m کوچکترین مضرب مشترك آنها رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$x^{2}-y^{2}=d(2m+d). \qquad \text{(THEBAULT.)}$$

با فرض $x=d\alpha$ و $y=d\beta$ داریم :

$$\alpha^{2}-\beta^{2}=2\alpha\beta+1,$$

$$(\alpha-\beta)^{2}-2\beta^{2}=1.$$

با فرض $\alpha-\beta=z,$ خواهیم داشت : $z^{2}-2\beta^{2}=1$ که کوچکترین جواب‌آن $z=3$ و $\beta=2$ می‌باشد و درنتیجه $\alpha=5$ و $\beta=2$ و $x=5d$ و $y=2d$ با فرض $d=18$ داریم : $x=90$ و $y=36$ و با قراردادن این مقادیر درجواب عمومی مقادیر :

$$y=12\times 18=216 \quad \text{و} \quad x=29\times 18=522$$

$$y=408\times 18 \quad \text{و} \quad x=985\times 18$$

و غیره را بدست آوریم .

مثال ۳ـ مطلوبست محاسبهٔ چهارتا از کوچکترین اعداد مثلثی که مربع کامل باشند .

(**تعریف ـ** اگر درعبارت $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$, که مجموع n جمله از یك تصاعد حسابی بجملهٔ اول یك و قدر نسبت b می‌باشد به b مقادیر $0,1,2,3,\ldots$ را بدهیم خواهیم داشت :

$$n,\quad \frac{1}{2}n(n+1),\quad n^2,\quad \frac{1}{2}n(3n-1),\ \ldots$$

که جملات nام **اعداد چندضلعی** ازمرتبهٔ دوم، سوم و چهارم می‌باشد درمرتبهٔ اول‌هرجمله یك می‌باشد اعدادچندضلعی مرتبهٔ دوم وسوم وچهارم وپنجم وغیره را اغلب اعداد **خطی** ، **مثلثی** ، **مربعی** ، **مخمسی** ، ...... می‌نامند) در این‌جا $\frac{x(x+1)}{2}=y^2$, و با فرض $2x+1=z$, به معادلهٔ $z^2-8y^2=1$ می‌رسیم که کوچکترین اعداد مثلثی مطلوب می‌شوند . ۲۰۴ و ۳۵ و ۶ و ۱

مثال ۴ ـ مطلوبست تعیین دوعدد صحیح متوالی که تفاضل مکعبات آنها مربع کامل باشد .

در این‌جا معادله $(x+1)^3-x^3=y^2$, یا با فرض $z=1+2x$ و $2y=t$ معادله بصورت $t^2-3z^2=1$ می‌باشد که دارای بی‌نهایت جواب است و برای مثال $8^3-7^3=13^2$ و $105^3-104^3=181^2$

مثال ۵ـ ثابت کنید مربع اعداد مثلثی مربع ضرایب قوای x در بسط $\frac{1}{1-6x+x^2}$ می‌باشد و همچنین مربع اعداد مخمسی ضرایب قوای x در بسط $\frac{1}{1-10x+x^2}$ می‌باشد .

باتوجه به مثال ۳ بند ۹ اعداد مثلثی بصورت $\frac{1}{2}n(n+1)$ می‌باشد.

اگر این اعداد مربع کامل باشند داریم $\frac{1}{2}n(n+1)=k^2$ که به معادلهٔ $z^2-8y^2=1$; می‌رسیم و چون :

$$\sqrt{8}=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\dots\dots$$

و از آنجا باتوجه به بند ۹ مقادیر k مخرجهای تقاربهای زوج کسر مسلسل فوق می‌باشد . و چون :

$$q_{2n+2}=q_{2n+1}+q_{2n}\,,\quad q_{2n+1}=4q_{2n}+q_{2n-1}\,,$$
$$q_{2n}=q_{2n-1}+q_{2n-2}\,,$$

با حذف q_{2n+1} و q_{2n-1} داریم $q_{2n+2}-6q_{2n}+q_{2n-2}=0,$
وچون $q_2=1$ و $q_4=6$ مجموع سری بازگشتی[1] $q_2+q_4x+q_6x^2+\dots\dots$ که در آن $1-6x+x^2$ مقیاس ارتباط می‌باشد مساوی $\dfrac{1}{1-6x+x^2}$ است .

اعداد مخمسی بصورت $\frac{1}{2}n(3n-1)$, و درنتیجه : $3n^2-n=2k^2,$ و ازآنجا :

$$(6n-1)^2=24k^2+1=t^2, \implies t^2-24k^2=1;$$

$$\sqrt{24}=4+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\,\dots\dots$$

۱ـ سری $u_0+u_1+u_2+\dots\dots$ را که درآن ازیك جمله به بعد هرجمله مساوی مجموع تعدادثابتی ازجملات قبل که به‌ترتیب درثابت‌هائی‌ضرب می‌شوندباشد **سری بازگشتی** گفته می‌شود . مثلا درسری $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots\dots$ هرجمله ازجملهٔ دوم به بعد مساوی مجموع دوجملهٔ قبل که به ترتیب درثابتهای $2x$ و $-x^2$ ضرب شوند می‌باشد این‌مقادیر چون برای تمام جملات سری بازاء جمیع مقادیر n همین مقادیر می‌باشند ثابت نامیده می‌شوند . پس ،

$$5x^4=2x.4x^3+(-x^2).3x^2.$$

یعنی $u_4=3xu_3-x^2u_2$ و بطورکلی بازاء $n>1$ هرجمله با دوجملهٔ بلافاصله قبل نامعادله $u_n=2xu_{n-1}-x^2u_{n-2}.$ یا $u_n-2xu_{n-1}+x^2u_{n-1}=0$ مربوط می‌شود . در این معادله اگر ضرایب u_n ، u_{n-1} ، u_{n-1} با علامت حقیقی‌شان در نظرگرفته شوند ، عبارت حاصل را **مقیاس ارتباط** می‌نامند . بنابراین مقیاس ارتباط درسری فوق $1-2x+x^2$ می‌باشد .

در این‌جا :

$$q_{2n+2}=p_{2n+1}+q_{2n}\ ;\quad q_{2n+1}=8q_{2n}+q_{2n-1}\ ;$$
$$q_{2n}=q_{2n-1}+q_{2n-2}\ ;\quad q_{2n+2}-10q_{2n}+q_{2n-2}=0$$

وچون $q_2=1$ و $q_4=10$ می‌باشدمجموع سری ..... $q_2+q_4x+q_6x^2+$

مساوی $\frac{1}{1-10x+x^2}$ می‌باشد .

۱۰ـ اگر $x=h$ و $y=k$ یك‌جواب صحیح ومثبت معادله $x^2-Ny^2=1$ باشد ، جوابهای عمومی معادله را طبق روش زیر می‌توان بدست آورد :

با قراردادن این مقادیر درمعادله و به توان رسانیدن داریم :

$(h^2-Nk^2)^n=1;$ که در آن $n\in N^*$ و از آنجا :

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$
$$\therefore\quad (x+y\sqrt{N})(x-y\sqrt{N})=(h+k\sqrt{N})^n.(h-k\sqrt{N})^n.$$

باگذاردن $x+y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n,\ \ x-y\sqrt{N}=(h-k\sqrt{N})^n$

$$\therefore\quad 2x=(h+k\sqrt{N})^n+(h-k\sqrt{N})^n;$$
$$2y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n-(h-k\sqrt{N})^n;$$

بادادن مقادیر ۱، ۲ ، ۳ ، ..... به n جوابهای صحیح و مثبت x ، y حاصل می‌شوند .

به طریق مشابه اگر $\{x=h\ \ \text{و}\ \ y=k\in N^*\}$ یك جواب معادله $x^2-Ny^2=-1$ باشد و اگر n عدد مثبت فرد و صحیح باشد :

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$

و n فقط محدود به مقادیر فرد می‌باشد .

توجه ـ معادلهٔ $x^2-Ny^2=\pm a^2$ با فرض $x=ax'$ و $x=ay'$ به صورت $x'^2-Ny'^2=\pm1$ که قبلا مورد مطالعه قرار گرفته درمی‌آید.

مثال ۱ـ محاسبهٔ جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ : $x^2-3y^2=1$

در این‌جا ...... $\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}$ و $x=2$ و $y=1$ یك جواب معادله می‌باشند از آنجا :

$$x^۲-۳y^۲=(۲^۲-۳^۲)^n;\Longrightarrow$$

$$(x+\sqrt{۳}y)(x-\sqrt{۳}y)=(۲+\sqrt{۳})^n.(۲-\sqrt{۳})^n.$$

$$\therefore\quad ۲x=(۲+\sqrt{۳})^n+(۲-\sqrt{۳})^n;$$

$$۲y\sqrt{۳}=(۲+\sqrt{۳})^n-(۲-\sqrt{۳})^n;$$

مثال ۲ـ حل معادلهٔ $x^۲-۱۷y^۲=-۱$

در اینجا: $\sqrt{۱۷}=۴+\frac{۱}{۸+}\;\frac{۱}{۸+}\;\cdots\cdots$

و $x=۴$ و $y=۱$ یك جواب می‌باشند از آنجا :

$$(x+y\sqrt{۱۷})(x-y\sqrt{۱۷})=(۴+\sqrt{۱۷})^n(۴-\sqrt{۱۷})^n.$$

$$(n=۲k+۱\in N^*)$$

$$\therefore\quad ۲x=(۴+\sqrt{۱۷})^n+(۴-\sqrt{۱۷})^n;$$

$$۲y\sqrt{۱۷}=(۴+\sqrt{۱۷})^n-(۴-\sqrt{۱۷})^n;$$

مثال ۳ـ حل معادلهٔ $x^۲-۷y^۲=۹$

بافرض $x=۳x'$ و $y=۳y'$ داریم ؛ $x'^۲-۷y'^۲=۱$ و از آنجا :

$$\sqrt{۷}=۲+\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۴+}\;\cdots;$$

و تقارب ماقبل آخر $\frac{۸}{۳}$ و ازآنجا $x'=۸$ و $y'=۳$ و جوابهای کلی را بسهولت می‌توان بدست آورد .

۱۱ـ حل معادله $x^۲-Ny^۲=\mp a$,

در بند ۹ دیده شد که :

$$p'^۲-Nq'^۲=-r_n(pq'-p'q)=\pm r_n.$$

از آنجا اگر a مخرج هرخارج قسمت کامل در تبدیل $\sqrt{N}$ به‌کسر مسلسل باشد و اگر $\frac{p'}{q'}$ تقارب حاصل را در نزدیك‌ترین توقف به‌این خارج قسمت کامل باشد یکی از معادلات $x^۲-Ny^۲=\pm a$ بازاء $x=p'$ و $y=q'$ برقرار است .

همچنین تقاربهای فرد همگی کمتر از $\sqrt{N}$ و تقاربهای زوج همگی زیادتر از $\sqrt{N}$ می‌باشند از آنجا اگر $\frac{p'}{q'}$ تقارب زوج باشد $x=p'$ و $y=q'$ یك جواب معادله $x^{۲}-Ny^{۲}=a$ و اگر تقارب فرد باشد یك جواب معادله $x^{۲}-Ny^{۲}=-a$ می‌باشد .

با این روش می‌توانیم یك جواب از یکی از معادلات $x^{۲}-Ny^{۲}=\pm a$ را فقط وقتی a یکی از مخرجهائی باشد که درعمل تبدیل $\sqrt{N}$ به‌کسرهای مسلسل ظاهر می‌شود بدست آوریم . برای تبدیل $\sqrt{۷}$ به‌کسرهای مسلسل داریم :

$$\sqrt{۷}=۲+\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۴+}\ \cdots\cdots$$

مخرج خارج قسمتهای کامل عبارتند از ۱،۳،۲،۳

تقاربهای متوالی در این‌حال :

$$\frac{۲}{۱},\ \frac{۳}{۱},\ \frac{۵}{۲},\ \frac{۸}{۳},\ \frac{۳۷}{۱۴},\ \frac{۴۵}{۱۷},\ \frac{۸۲}{۳۱},\ \frac{۱۲۷}{۴۸},\ \cdots\cdots$$

و اگر معادلات :

$$x^{۲}-۷y^{۲}=-۳,\qquad x^{۲}-۷y^{۲}=۲,$$
$$x^{۲}-۷y^{۲}=-۳,\qquad x^{۲}-۷y^{۲}=۱ \text{ و}$$

را درنظر بگیریم این معادلات بازاء مقادیر زیر برقرارند :

$$x=۲,۳,۵,۸,۳,۷,۴۵,۸۲,۱۲۷,\cdots\cdots$$

$$y=۱,۱,۲,۳,۱۴,۱۷,۳۱,۴۸,\cdots\cdots$$

بنابراین تعداد حالتهائیکه بتوان جـوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x^{۲}-Ny^{۲}=\pm a,$ را بدست‌آورد بطورقطع خیلی محدود است در مثالهای عددی‌اغلب می‌توان با امتحان وتجسس یکی از جوابهای صحیح ومثبت معادلهٔ $x^{۲}-Ny^{۲}=\pm a$ را هنگامیکه a مخرج یکی از خارج قسمتهای بالا نباشد بدست آورد . برای مثال بسهولت ملاحظه می‌شودکه $y=۲$ ، $x=۹$ یکی‌جوابهای معادله $x^{۲}-۷y^{۲}=۵۳$ می‌باشد . بامعلوم یك جواب می‌توان جواب عمومی معادله را طبق روش زیر محاسبه نمود :

فرض کنیم $x=f$ و $y=g$ یك جواب معادله $x^{۲}-Ny^{۲}=a,$ و

$x=h$ و $x=k$ هرجوابی از معادله $x^2-Ny^2=1$ باشد در اینصورت :

$$x^2-Ny^2=(f^2-Ng^2)(h^2-Nk^2).$$
$$=(fh\pm Ngk)^2-N(fk\pm gh)^2,$$

و ازآنجا : $x=fh\pm Ngk$ ، $y=fk\pm gh$ ،

مقادیر h و k را می‌توان طبق روش بند ۹ محاسبه نمود و ازآنجا جوابهای معادلهٔ فوق را بدست‌آورد .

مثال ـ کوچکترین جواب مثبت و صحیح معادلهٔ :

$x^2-61y^2+5=0$ را بدست‌آورید .

باتوجه به بند ۱۱ کسرهای مسلسل داریم :

$$\sqrt{61}=7+(\sqrt{61}-7)=7+\frac{12}{\sqrt{61}+7},$$

$$\frac{\sqrt{61}+7}{12}=1+\frac{\sqrt{61}-5}{12}=1+\frac{3}{\sqrt{61}+5},$$

$$\frac{\sqrt{61}+5}{3}=4+\frac{\sqrt{61}-7}{3}=4+\frac{4}{\sqrt{61}+7},$$

$$\frac{\sqrt{61}+7}{4}=3+\frac{\sqrt{61}-5}{4}=3+\frac{9}{\sqrt{61}+5},$$

$$\frac{\sqrt{61}+5}{9}=1+\frac{\sqrt{61}-4}{9}=1+\frac{5}{\sqrt{61}+4},$$

$$\frac{\sqrt{61}+4}{5}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

بنابراین ۵ یکی از مخرجهائی است که در عمل تبدیل $\sqrt{61}$ به کسرهای مسلسل حاصل شده است وتقارب قبل ازاین خارج قسمت مساویست‌با $\frac{164}{21}$ و ازآنجا $x=164$ و $y=21$ یك جواب می‌باشد .

۱۲ـ حالت‌کلی معادلات درجه دوم دومتغیری :

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0, \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\{a,b,—\in Z\}$$

اگر $ac-b^{2}=0$, باشد معادله را می‌توان بفرم زیر نوشت :

$$(ax+by)^{2}+2adx+2aey+af=0,$$

برای اینکه جواب گویا داشته باشیم باید :

$$ax+by=t,\quad 2adx+2aey+af=-t^{2}, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ x&=\frac{-bt^{2}-2aet-abf}{2a(bd-ae)},\\ y&=\frac{t^{2}+2dt+af}{2(bd-ae)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

اگر جوابها صحیح باشند لازم است که t صحیح باشد بنا به معادلات (۳) لازم و کافی است که عدد صحیح t صادق در همنهشت‌های زیر باشد :

$$t^{2}+2dt+af\equiv 0 \bmod 2(bd-ae),$$

$$bt^{2}+2aet+abf\equiv 0 \bmod 2a(bd-ae).$$

اگر $ac-b^{2}\neq 0$, باشد جواب را به سادگی نمی‌توان تعیین نمود معذلك طرفین معادلهٔ (۱) را در $(ac-b^{2})^{2}$, ضرب نموده ونتیجه را بشکل:

$$au^{2}+2buv+cv^{2}=m, \qquad (4)$$

می نویسیم که در آن

$$\left.\begin{aligned} u&=(ac-b^{2})x-(be-cd).\\ v&=(ac-b^{2})y-(bd-ae),\\ m&=(ac-b^{2})(ae^{2}+cd^{2}+fb^{2}-acf-2bde) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

و قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته است .

مثال ۱ـ جوابهای صحیح و مثبت معادله :

$$(5x-12y)^{2}-2x-29y-1=0,$$

با فرض $5x-12y=t$ و $2x+29y+1=t^{2}$ داریم :

$$\left.\begin{aligned} 5x-12y&=t\\ 2x+29y&=t^{2}-1 \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{۱۲t^۲+۲۹t-۱۲}{۱۶۹}; \qquad y=\frac{۵t^۲-۲t-۵}{۱۶۹}$$

که دو همنهشت را می‌توان حل نمود .

۱۳ ـ حل معادلهٔ درجهٔ دوم دومتغیری که نسبت به‌هریك ازمتغیرها درجهٔ اول است .

$$axy+by+cx=d.$$

این معادله نسبت به دومتغیر درجهٔ اول است می‌توان یکی ازآنهامثلاً y را حساب نمود :

$$y = \frac{d-cx}{ax+b}$$

و طبق روش زیرآنها را حل می‌نمائیم :

مثال ۱ـ جوابهای صحیح ومثبت معادله $y = \frac{۳x-۴}{x-۲}$ را بدست آورید .

فرض می‌کنیم $x-۲=t$ پس $x=t+۲$ و ازآنجا :

$$y=\frac{۳t+۶-۴}{t}=\frac{۳t+۲}{t}=۳+\frac{۲}{t}$$

برای اینکه y عدد صحیح باشد لازم وکافی است که:

$$t=\pm۱,\pm۲ و x=\substack{۳\\۱};\substack{۴\\۰} \Longrightarrow x=(۰,۱,۳,۴); \quad y=(۲;۱;۵;۴);$$

مثال ۲ـ جوابهای صحیح و مثبت معادله : $y=\frac{۶x-۷}{۳x-۱}$ را بدست آورید .

فرض می‌کنیم $۳x-۱=t$ و ازآنجا $۳x=t+۱$ و درنتیجه:

$$y=\frac{۲t+۲-۷}{t}=\frac{۲t-۵}{t}=۲-\frac{۵}{t}\Longrightarrow t=\pm۱;\pm۵$$

$$x=(۰,۲); \qquad y=(۷,۱).$$

مثال ۳ـ جوابهای صحیح ومثبت معادله: $y = \frac{۴x-۷}{۳x-۲}$ را بدست

آورید .

طرفین را در ۳ (ضریب x در مخرج) ضرب می‌کنیم خواهیم داشت :

$$۳y=\frac{۱۲x-۲۱}{۳x-۲};\quad ۳x-۲=t \Longrightarrow ۳x=t+۲$$

$$\therefore\quad ۳y=\frac{۴t+۸-۲۱}{t}=\frac{۴t-۱۳}{t}=۴-\frac{۱۳}{t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow t=\pm۱;\pm۱۳$$

$$x=(۱,۵);\quad y=(-۳,۱)$$

که جواب قابل قبول فقط $y=۱$ و $x=۵$ می‌باشد .

۱۴ـ معادله‌ای که نسبت به یکی از متغیرها درجهٔ اول است :

$$ax^۲+bxy+cx+dy+e=۰,$$

مثال ۱ـ محاسبهٔ جوابهای صحیح و مثبت معادله :

$$۳x^۲+۷xy-۲x-۵y-۳۵=;$$

داریم :
$$y(۷x-۵)+۳x^۲-۲x-۳۵=۰;$$

$$\therefore\quad y+\frac{۳x^۲-۲x-۳۵}{۷x-۵}=۰;$$

$$\therefore\quad ۷y+۳x+\frac{x-۲۴۵}{۷x-۵}=۰;$$

$$\therefore\quad ۴۹y+۲۱x+۱-\frac{۱۷۱۰}{۷x-۵}=۰.$$

بنابراین باید $\frac{۱۷۱۰}{۷x-۵}$ عدد صحیح باشد یعنی $۷x-۵$ باید یکی ازفاکتورهای ۱۷۱۰ باشد که جوابهای $x=(۲,۱)$; $y=(۳,۱۷)$ بدست می‌آید .

مثال ۲ـ محاسبهٔ عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ باشرط :

$$\overline{mcdu}=\overline{mc}\,(\overline{mc}+\overline{du}).$$

با فرض $\overline{mc}=x$ و $\overline{du}=y$ $(۱۰\leqslant x\leqslant ۹۹$ و $۰\leqslant y\leqslant ۹۹)$ داریم :

$$۱۰۰x+y=x(x+y).$$

$$\therefore \quad ۱۰۰x+y=x^۲+xy$$

$$y=\frac{۱۰۰x-x^۲}{x-۱},$$

با فرض $t=x-۱$ داریم :

$$y=\frac{۱۰۰(t+۱)-(t+۱)^۲}{t}=\frac{۱۰۰t+۱۰۰-t^۲-۲t-۱}{t}=$$

$$=-t+۹۸+\frac{۹۹}{t}$$

و چون $۹\leqslant t\leqslant ۹۸$ می‌باشد پس: $t=(۹,۱۱,۳۳)$ و ازآنجا :

$$x=(۱۲,۳۴);\qquad y=(۹۶,۶۸)$$

و جوابهای عدد مفروض ۱۲۹۶ و ۳۴۶۸ می‌باشد .

مثال ۳ـ حل معادله : $\overline{mcdu}=(\overline{du})^۲-(\overline{mc})^۲$ (با شرط $\overline{du}>\overline{mc}$)

با فرض $\overline{mc}=x$ ، $\overline{du}=y$ داریم :

$$۱۰۰x+y=y^۲-x^۲,$$

با فرض $x+y=u$ داریم :

$$۹۹y+u=u(u-۲y)\implies y=\frac{u^۲-u}{۲u+۹۹};$$

با فرض $۲u+۹۹=t$ داریم:

$$۴y=\frac{۴u^۲-۴u}{۲u+۹۹}=\frac{(t-۹۹)^۲-۲(t-۹۹)+۱}{t}=t-۲۰۰+$$

$$+\frac{۹۹۹۹}{t}=t-۲۰۰+\frac{۹\times ۱۱\times ۱۰۱}{t}$$

چون $۲۱<u<۱۹۸$ داریم : $۴۲<۲u<۳۹۶$ و

$$۱۴۱<\overbrace{۲u+۹۹}^{t}<۴۹۵$$ و ازآنجا :

$$t=۳۰۳ \implies x=۳۴;\quad y=۶۸$$

توجه ـ باین‌ترتیب ریشه‌های صحیح هر معادلهٔ سیال $y=\frac{f(x)}{ax+b}$ را می‌توان بدست آورد .

مثال ۴ـ ریشه‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $y=\frac{۳x^۴-۲x^۳+۶}{x-۱}$ را بدست آورید .

با فرض $x-۱=t$ و $x=t+۱$ داریم :

$$y=\frac{۳(t+۱)^۴-۲(t+۱)^۳+۶}{t}=$$

$$=\frac{۳(t^۴+۴t^۳+۶t^۲+۴t+۱)-۲(t^۳+۳t^۲+۳t+۱)+۶}{t}$$

$$=\frac{۳t^۴+۱۰t^۳+۱۲t^۲+۶t+۷}{t}=۳t^۳+۱۰t^۲+۱۲t+۶+\frac{۷}{t}$$

و ازآنجا باید $t=\pm۱;\ \pm۷$

$$x=(۲;۸)\qquad y=(۳۸;۱۵۶۰)$$

حل چند مثال با روشهای مختلف

مثال ۵ـ مطلوبست حل معادلهٔ :

$$x^۲-۴xy+۶y^۲-۲x-۲۰y=۲۹;$$

با حل برحسب x داریم :

$$x=۲y+۱\pm\sqrt{۳۰+۲۴y-۲y^۲}=$$

$$=۲y+۱\pm\sqrt{۱۰۲-۲(y-۶)^۲};$$

عبارت زیررادیکال وقتی مربع کامل است که $(y-۶)^۲=(۱;۴۹)$ بنابراین جوابهای مثبت عبارتند از : ۵،۷،۱۳ و ازآنجا :

$$y=(۵,۷,۱۳)\qquad x=\begin{Bmatrix}۲۱; & ۲۵; & ۲۹\\ ۱; & ۵; & ۲۵\end{Bmatrix}$$

مثال ۶ـ محاسبهٔ عدد چهاررقمی $\overline{mcdu}$ با شرط :

$$\overline{mcdu}=(\overline{mc}+\overline{du})^۲$$

با فرض $\overline{mc}=x$ ، $\overline{du}=y$ معادله بصورت زیر درمی‌آید :

$$100x+y=(x+y)^2$$

با فرض $x+y=s$ داریم :

$$99x+s=s^2$$

$$\therefore \qquad s(s-1)=99x.$$

چون $s-1$ و s دوعدد متوالی‌اند نسبت بهم اول می‌باشند بنابراین $99x$ باید بصورت حاصل‌ضرب دوعدد متوالی درآید .

اولاً) اگر $s=99$ و $s-1=x=98$ باشد عدد $N_1=9801$

ثانیاً) اگر $x=\alpha.\beta$ فرض‌شود دوعدد 9α ، 11β را می‌توان بصورت دوعدد متوالی درآورد :

$$9\alpha+1=11\beta \quad \text{یا} \quad 11\beta+1=9\alpha$$

I– جوابهای عمومی معادلهٔ سیال $9\alpha+1=11\beta$ با توجه به اینکه بازاء $\alpha=6$ و $\beta=5$ برقرار است عبارتست از :

$$\alpha=6+11t; \qquad \beta=5+9t$$

که فقط بازاء $t=0$ قابل قبول است و ازآنجا $x=30$ و $y=25$.

II– جوابهای عمومی معادلهٔ سیال $11\alpha+1=9\beta$ باتوجه به اینکه بازاء $\alpha=4$ و $\beta=5$ برقرار است عبارتست از :

$$\alpha=4+9t; \qquad \beta=5+11t;$$

و ازآنجا $x=20$ و $y=25$ بنابراین سه جواب زیر را خواهیم داشت :

$$N_1=9801; \qquad N_2=3025; \qquad N_3=2025;$$

مثال ۷– حل معادلهٔ : $\overline{mcdu}=\overline{mc}^2+\overline{du}^2,$

در این‌جا معادله بصورت $100x+y=x^2+y^2$

$$\therefore \qquad 400x+4y=4x^2+4y^2,$$

$$\therefore \qquad (2y-1)^2+(2x-100)^2=100^2+1,$$

$$(2y-1)^2+4(x-50)^2=10001,$$

اعداد مربع کامل به ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، ۹ ختم می‌شوند . چون مجموع دومربع

کامل به ۱ ختم شده است پس دو عدد یا به صفر و یك ختم می‌شوند و یا به ۵ و ۶ و ۱ — ۲y عدد فرد و کمتر از ۱۰۰ می‌باشد پس می‌تواند:
۱، ۱۱، ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱، ۸۱، ۹۱ (با امتحان این مقادیر ملاحظه می‌شود که برای معادله جوابی بدست نمی‌آید) و یا ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ۴۵، ۵۵، ۶۵، ۷۵، ۸۵، ۹۵ باشد با امتحان این رشته مقادیر بازاء ۶۵ داریم :

$$۴۲۲۵+۴(x-۵۰)^۲=۱۰۰۰۱$$

$$\therefore \quad ۴(x-۵۰)^۲=۵۷۷۶ \implies (x-۵۰)^۲=۱۴۴۴,$$

$$\therefore \quad x-۵۰=\pm ۳۸ \implies x=(۸۸,۱۲) \text{ و } y=۳۳$$

$$\therefore \quad N_۱=۱۲۳۳, \quad N_۲=۸۸۳۳$$

مثال ۸ـ محاسبهٔ جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ :

$$۲x^۲-xy-y^۲+۲x+۷y=۸۴,$$

$$\therefore \quad (۲x+y-۴)(x-y+۳)=۷۲,$$

$$\therefore \quad ۲x+y-۴=(۷۲,۳۶,۲۴,۱۸,۱۲,۹,۸,۶,۴,۳,۲,۱)$$

$$x-y+۳=(۱,۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۲,\dots\dots)$$

$$\therefore \quad ۳x-۱=(۷۳,۳۸,۲۷,۲۲,۱۸,۱۷)$$

و تنها مقادیر صحیح x عبارتند از ۱۳ و ۶ که مقادیر متناظر y به ترتیب ۱۴ و ۱ می‌شود .

مثال ۹ ـ اگر $\{a,b,c\in Z\}$ باشد جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید :

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ .$$

معادله را می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{z}{x}=\frac{bz+cy}{any}\ .$$

با فرض $\frac{z}{y}=\frac{m}{n}$ داریم :

$$\frac{z}{x}=\frac{bm+cn}{an},$$

$$\therefore \quad x:y:z=amn:n(bm+cn):m(bm+cn).$$

تمرین

مطلوبست تعیین جوابهای صحیح و مثبت معادلات :

۱- $۲xy-۳x+۲y=۱۳۲۹,$

۲- $x^۲-xy+۲x-۳y=۱۱,$

۳- $۲x^۲+۵xy-۱۲y^۲=۲۸,$

۴- $۲x^۲-xy-y^۲+۲x+۷y=۸۴$

۵- $۵x^۲-۱۰xy+۷y^۲=۷۷,$

۶- $y^۲-۴xy+۵x^۲-۱۰x=۴,$

۷- $۷x^۲-۲xy+۳y^۲=۲۷,$

۸- $x^۲-۳xy+۳y^۲=z^۲,$

۹- $x^۲+۲xy+۲y^۲=z^۲,$

۱۰- $۵x^۲+y^۲=z^۲$

۱۵- بررسی معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=t^۲,$

باتوجه به‌اتحاد زیر یك رشته جواب معادله فوراً بدست می‌آید:

$$(m^۲-n^۲-p^۲+q^۲)^۲+(۲mn-۲pq)^۲+(۲mp+۲nq)^۲=$$
$$=(m^۲+n^۲+p^۲+q^۲)^۲.$$

بازاء $m=۳$ ، $n=۲$ ، $p=۱$ ، $q=۲$ داریم:

$$۳^۲+۱۴^۲+۱۸^۲=۲۳^۲,$$

۱۶- بررسی معادلهٔ $\alpha^۲+a\beta^۲+b\rho^۲=t^۲,$

با توجه به اتحاد :

$$(x^۲-ay^۲-bu^۲+abv^۲)^۲+a(۲xy-۲buv)^۲+$$
$$+b(۲ux+۲avy)^۲=(x^۲+ay^۲+bu^۲+abv^۲),$$

جوابهای عمومی معادله با چهار پارامتر فوراً حاصل می‌شود . اگر بخواهیم می‌توان بازاء $x=۰$ آنرا با سه پارامتر بدست آوریم .

۱۷ـ بررسی اعداد بفرم $g(x,y,u,v)=x^۲+ay^۲+bu^۲+abv^۲$

بسهولت می‌توان ثابت نمود که :

$$g(x,y,u,v)\cdot g(x_۱,y_۱,u_۱,v_۱)=g(x_۲,y_۲,u_۲,v_۲), \text{.........}(A)$$

که در آن

$$\left.\begin{array}{l} x_۲=xx_۱-ayy_۱-buu_۱+abvv_۱, \\ y_۲=xy_۱+x_۱y-buv_۱-bu_۱v, \\ u_۲=ux_۱+u_۱x+avy_۱+av_۱y, \\ v_۲=vx_۱-v_۱x-uy_۱+u_۱y \end{array}\right\} \text{.........................}(B)$$

با توجه به معادلات (A) و (B) می‌توان نوشت :

$$[g(x,y,u,v)]^۲= \text{...........}(C)$$

$$=g(x^۲-ay^۲-bu^۲+abv^۲,۲xy-۲buv,۲ux+۲avy,۰)$$
$$=g(x^۲-ay^۲+bu^۲-abv^۲,۲xy+۲buv,۰,۲vx-۲uy)$$
$$=g(x^۲+ay^۲-bu^۲-abv^۲,۰,۲ux-۲avy,۲vx+۲uy)$$
$$=g(x^۲-ay^۲+bu^۲+abv^۲,۲xy,۲avy,۲uy)$$
$$=g(x^۲+ay^۲-bu^۲+abv^۲,۲buv,۲ux,۲uy),$$
$$=g(x^۲+ay^۲+bu^۲-abv^۲,۲buv,۲avy,۲vx),$$
$$=g(x^۲-ay^۲-bu^۲-abv^۲,۲xy,۲ux,۲vx).$$

و ازآنجا می‌توان معادلهٔ $\alpha^۲+a\beta^۲+b\gamma^۲+ab\mu^۲=t^۲$ و معادلات بند ۱۶ و ۱۵ را فوراً حل نمود .

تمرین

۱ـ بیاری معادلات (A)، (B)، (C) مقادیر ξ، η، μ، ν را طوری پیدا کنید که :

$$[g(x,y,u,v)]^۳=g(\xi,\eta,\mu,\nu).$$

و ازآنجا برای هریك از معادلات :

$$\xi^۲+a\eta^۲+b\mu^۲+ab\nu^۲=t^۳, \qquad \xi^۲+a\eta^۲+b\mu^۲=t^۳,$$

در حالت اول یك جواب با چهار پارامتر و درحالت دوم یك جواب با یك پارامتر بدست‌آورید .

یك جواب از هریك از معادلات زیر را بدست آورید :

۲) $x^{2}+ay^{2}+bu^{2}+abv^{2}=x_{1}^{2}+ay_{1}^{2}+bu_{1}^{2}+abv_{1}^{2}$
(با هشت پارامتر)

۳) $x^{2}+ay^{2}+bz^{2}=u^{2}+av^{2}+bw^{2}$ (با شش پارامتر)

۴) $x^{2}+y^{2}+z^{2}=u^{2}+v^{2}+w^{2}=r^{2}+s^{2}+t^{2}$ (باچهارپارامتر)

۵) $x^{2}+2y^{2}=u^{2}+v^{2}+w^{2}$ (با دوپارامتر)

۱۸- بررسی معادلهٔ :

$$\alpha^{4}+a\beta^{4}+b\gamma^{4}=\mu^{2}, \qquad \text{(1)}$$

اگر در اولین معادلهٔ گروه (C) فرض کنیم $v=0$ برای معادلهٔ فوق جوابهای زیر را داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\mu=x^{2}+ay^{2}+bu^{2}\\ \alpha^{2}=x^{2}-ay^{2}-bu^{2}\\ \beta^{2}=2xy\\ \gamma^{2}=2ux\end{array}\right\} \qquad \text{(2)}$$

معادلهٔ دوم دستگاه فوق در صورتی برقرار است‌که :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=x_{1}^{2}-ay_{1}^{2}-bu_{1}^{2}\\ x=x_{1}^{2}+ay_{1}^{2}+bu_{1}^{2}\\ y=2x_{1}y_{1}\\ u=2u_{1}x_{1}\end{array}\right\} \qquad \text{(3)}$$

درنتیجه سومین و چهارمین معادلهٔ (۲) می‌شوند :

$$\left.\begin{array}{l}\beta^{2}=4x_{1}y_{1}(x_{1}^{2}+ay_{1}^{2}+bu_{1}^{2})\\ \gamma^{2}=4u_{1}x_{1}(x_{1}^{2}+ay_{1}^{2}+bu_{1}^{2})\end{array}\right\} \qquad \text{(4)}$$

و این معادلات بافرض زیر برقرارند :

$$\left.\begin{array}{r} x_1=x_2^2,\quad y_1=y_2^2,\quad u_1=u_2^2, \\ x_2^4+ay_2^4+bu_2^4=\rho^2 \end{array}\right\} \text{..................} (5)$$

معادلهٔ آخر دستگاه (۵) بفرم (۱) می‌باشد . اگر ما یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱) رابدانیم این جواب درمعادلهٔآخر (۵) صادق و بااستفاده ازمعادلات دیگردستگاه (۵) و همچنین معادلات (۲) و (۳) و (۴) می‌توانیم مقادیر α، β،γ و μ و درنتیجه یك جواب‌خصوصی دیگرمعادلهٔ (۱) را بدست آوریم و باین‌طریق یك جواب دوم ، همین‌طور جواب سوم ، ...... و در نتیجه بی‌نهایت جواب برای معادلهٔ (۱) مشروط براینکه یك جواب خصوصی آنرا بدانیم حاصل می‌شود .

برای مثال معادلهٔ $\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4=\mu^2$, بازاء $a=b=2$ را درنظر می گیریم .

بکمك رابطهٔ :

$$3^4+2\times 4^4+2\times 2^4=25^2,$$

برای معادلهٔ (۵) جواب $x_2=3$, $y_2=4$, $u_2=2$, و $\rho=25$ بدست می‌آید و درنتیجه :

$x_1=9$, $y_1=16$, $u_1=4$, و بـا توجه به (۳) ، $\alpha=-463$, و $x=625$, $y=288$ و $u=72$ و با معادلات (۲) داریم :

$$\alpha=463,\quad \beta=600,\quad \gamma=300,\quad \mu=566\times 881$$

که یك جواب دوم ، با قرار دادن آن در معادلهٔ آخر (۵) و به جواب سوم ، بالاخره به بی‌نهایت جواب می‌توان رسید .

۱۹- بررسی معادلهٔ :

$$\alpha^2+a\beta^2+b\gamma^2=\mu^4 \text{..........................} (1)$$

با توجه به معادلات (C) بند ۱۷ ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق وقتی برقرار است که :

$$\left.\begin{array}{l} \mu^2=x^2+ay^2+bu^2+abv^2, \\ \alpha=x^2-ay^2-bu^2+abv^2, \\ \beta=2xy-2buv, \\ \gamma=2ux+2avy \end{array}\right\} \text{..................} (2)$$

اولین معادلهٔ این دستگاه وقتی برقرار است که :

$$\left.\begin{array}{l}\mu=x_1^2+ay_1^2+bu_1^2+abv_1^2\\ x=x_1^2-ay_1^2-bu_1^2+abv_1^2\\ y=2x_1y_1-2bu_1v_1\\ u=2u_1x_1+2av_1y_1\\ v=0\end{array}\right\}\text{.................}(3)$$

که درآن x_1، y_1، u_1، v_1 چهارعدد صحیح اختیاری می‌باشند درنتیجه معادلهٔ (۲) و (۳) یك جواب معادلهٔ (۱) می‌باشد .

۲۰ـ بررسی معادلهٔ :

$$\alpha^4+a\beta^4=\mu^2+b\eta^2,\text{..............................}(1)$$

معادله بازاء :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2=x^2+by^2-au^2,\\ \mu=x^2-by^2+au^2,\\ \eta=2xy\\ \beta^2=2ux,\end{array}\right\}\text{..............................}(2)$$

برقرار است . برای صادق بودن معادلهٔ اول (۲) باید :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=x_1^2+by_1^2-au_1^2\\ x=x_1^2-by_1^2+au_1^2\\ y=2x_1y_1\\ u=2u_1x_1\end{array}\right\}\text{..............................}(3)$$

و از (۳) و (۲) داریم :

$$\beta^2=4u_1x_1(x_1^2-by_1^2+au_1^2).$$

این معادله در صورتی برقرار است که :

$$\left.\begin{array}{ll}u_1=u_2^2, & x_1=x_2^2\\ x_2^4+au_2^4-by_1^2=\rho^2 & \end{array}\right\}\text{..............................}(4)$$

و این معادله بفرم معادلهٔ (۱) می‌باشند . پس جواب خصوصی معادلهٔ (۱) جواب خصوصی معادلهٔ (۴) است با قراردادن این مقدار در معادلهٔ (۴) و بعد در (۲) یك جواب خصوصی دیگر معادلهٔ (۱) را بدست می‌آوریم و همین‌طور اگر عمل را ادامه دهیم بی‌نهایت جواب برای معادلهٔ (۱) بدست می‌آوریم .

برای مثال حالت $\alpha^۴+\beta^۴=\mu^۲+\eta^۲$ را بازاء $a=b=۱$ درنظر می‌گیریم.

یك جواب این معادله از رابطهٔ :

$$۶^۴+۵^۴=۳۹^۲+۲۰^۲,$$

بدست می‌آید که باتوجه به معادلهٔ (۴) داریم :

$$x_۲=۶, \qquad u_۲=۵, \qquad y_۱=۲۰, \qquad (\text{یا } y_۱=۳۹)$$

که با توجه به معادلات (۳) و (۲) می‌توان یك جواب دیگر و همین طور بی‌نهایت جواب برای معادله بدست آورد .

تمرین

۱ـ مطلوبست یك جواب با دوپارامتر هریك از معادلهٔ :

$$۱\text{ـ } \alpha^۲+a\beta^۲=\mu^۴, \qquad ۲\text{ـ } \alpha^۲+a\beta^۲=\mu^n.$$

۲ـ اگر r،q،p صادق در روابط :

$$p+q+r=۱, \qquad \frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{r}=۰,$$

باشند . ثابت‌کنید :

$$a^۲+b^۲+c^۲=$$
$$=(pa+qb+rc)^۲+(qa+rb+pc)^۲+(ra+pb+qc)^۲.$$

(Davis 1912)

۲ـ مطلوبست تمام جوابهای معادلهٔ :

$$(x^۲+y^۲+z^۲)(x_۱{}^۲+y_۱{}^۲+z_۱{}^۲)=u^۲+v^۲+w^۲.$$

(Catalan, 1893)

۳ـ بررسی و حل دستگاه معادلهٔ سیالهٔ :

$$x^{2}+xy+2y^{2}=u^{2}, \qquad x^{2}-xy-2y^{2}=v^{2},$$

(Lucas, 1876)

۴ـ ثابت کنید دستگاه :

$$2v^{2}-u^{2}=w^{4}, \qquad 2v^{2}+u^{2}=3z^{2},$$

وقتی دارای جواب است که هریك از مقادیر u، v، w، z مساوی ± 1 باشند.

(Lucas, 1878)

۵ـ اگر p، r، s سه عدد صادق در رابطهٔ :

$$r^{4}+ar^{2}s^{2}+bs^{4}=p^{2},$$

باشند . ثابت کنید معادلهٔ :

$$x^{4}+ax^{2}y^{2}+by^{4}=z^{2},$$

به جواب زیر می‌باشد .

$$x=r^{4}-bs^{4}, \quad y=2prs, \quad z=p^{4}-(a^{2}-4b)r^{4}s^{4}.$$

(Lebesgue, 1853)

۶ـ ثابت کنید معادلهٔ :

$$x^{4}-2^{m}y^{4}=1,$$ (Thue, 1903)

دارای جواب نیست .

۷ـ مطلوبست مقادیر m و n برای اینکه معادلات زیر دارای جواب باشند : (Werebrussov, 1908)

۱ـ $x^{4}+mx^{2}y^{2}+y^{4}=z^{2}.$

۲ـ $x^{4}+mx^{2}y^{2}+ny^{4}=z^{2}.$

مطلوبست حل معادلات :

۸ـ $x^{2}+y^{2}+z^{2}=k(u^{2}+v^{2}+w^{2})=l(r^{2}+s^{2}+t^{2}).$

۹ـ $x^{4}+ay^{4}=u^{2}+av^{2},$

۱۰ـ $x^{4}+ay^{4}=u^{2}+bv^{2},$

۱۱ـ $x^{4}+ay^{4}+bu^{4}+abv^{4}=t^{2},$

۱۲ـ فرض کنیم a و b اعداد صحیح مفروض و $k>\circ$ باشد. خواصی برای عدد صحیح m طوری پیدا کنید که معادلهٔ :

$$x^{۲}+axy+by^{۲}=mt^{k}.$$

دارای جواب صحیح باشد . این جوابها را وقتی وجود دارند تعیین کنید و حالتهای خاص $k=۲,۳$ را درنظر بگیرید .

۱۳ـ تئوری مشابهی را (مسأله ۱۲) برای هریك از معادلات زیر بکار برید :

$$x^{۲}+ay^{۲}+bz^{۲}=mt^{k},$$
$$x^{۴}+ay^{۴}+bz^{۴}=mt^{k},$$
$$x^{۴}+ay^{۴}=m(u^{۲}+av^{۲}),$$
$$x^{۴}+ay^{۴}=m(u^{۲}+bv^{۲}).$$

۲۱ـ معادلات درجه سوم با ریشه‌های گویا

بررسی ریشه‌های گویای معادلهٔ :

$$x^{۳}+ax^{۲}y+bxy^{۲}+cy^{۳}=t^{۲}, \quad \text{......} (۱)$$

که درآن a،b،c اعداد گویایی باشند .

تابع :

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=\prod_{i=۱}^{۳}(\alpha+\rho_i\beta+\rho_i^{۲}\gamma), \quad \text{......} (۲)$$

که درآن $\rho_۱،\rho_۲،\rho_۳$ ریشه‌های معادلهٔ :

$$\rho^{۳}-a\rho^{۲}+b\rho-c=\circ, \quad \text{......} (۳)$$

می‌باشند درنظر می‌گیریم بدیهی است که :

$$h(x,y,\circ)=x^{۳}+ax^{۲}y+bxy^{۲}+cy^{۳}.$$

بالاخره با ضرب اتحاد (۲) داریم :

$$h(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^{۳}+a\alpha^{۲}\beta+b\alpha\beta^{۲}+c\beta^{۳}+$$
$$+(a^{۲}-۲b)\alpha^{۲}\gamma++(b^{۲}-۲ac)\alpha\gamma^{۲}+$$
$$+ac\beta^{۲}\gamma+bc\beta\gamma^{۲}+c^{۲}\gamma^{۳}+(ab-۳c)\alpha\beta\gamma \quad \text{......} (۴)$$

چون ρ_i درمعادلهٔ (۳) صادق است بسهولت ملاحظه می‌شود :

$$(\alpha+\rho_i\beta+\rho_i^{2}\gamma)(u+\rho_i v+\rho_i^{2}w)=r+\rho_i s+\rho_i^{2}t,$$

که در آن r، s، t مقادیر گویا می‌باشند در محاسبه مقادیر r، s، t نتایج زیر را بدست می‌آوریم :

I ـ اگر r، s، t دارای مقادیر

$$\left.\begin{aligned}r&=\alpha u+c\gamma v+c\beta w+ac\gamma w,\\ s&=\beta u+\alpha v-b\gamma v-b\beta w+c\gamma w-ab\gamma w,\\ t&=\gamma u+\beta v+\alpha w+a\gamma v+a\beta w-b\gamma w+a^{2}\gamma w,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

باشند در این صورت :

$$h(\alpha,\beta,\gamma,)\cdot h(u,v,w)=h(r,s,t) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

از این رابطه فوراً می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\left.\begin{aligned}[h(\alpha,\beta,\gamma)]^{2}=h(&\alpha^{2}+2c\beta\gamma+ac\gamma^{2},\\ &2\alpha\beta-2b\beta\gamma+c\gamma^{2}-ab\gamma^{2},\\ &2\alpha\gamma+\beta^{2}+2a\beta\gamma-b\gamma^{2}+a^{2}\gamma^{2}),\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

به کمك رابطهٔ اخیرمی‌توان یك جواب بادوپارامتر معادلهٔ (۱) رابدست‌آورد. رابطهٔ اخیر را می‌توان بفرم $h(x,y,0)=t^{2}$, نوشت که درآن :

$$\left.\begin{aligned}t&=h(\alpha,\beta,\gamma),\\ x&=\alpha^{2}+2c\beta\gamma+ac\gamma^{2}\\ y&=2\alpha\beta-2b\beta\gamma+c\gamma^{2}-ab\gamma^{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

با توجه به اینکه α، β، γ صادق در رابطهٔ زیر می‌باشند :

$$2\alpha\gamma+\beta^{2}+2\alpha\beta\gamma-b\gamma^{2}+a^{2}\gamma^{2}=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

در رابطهٔ اخیر α خطی است بنابراین یك تابع گویا برحسب β، γ با ضرائب گویا می‌باشد . درنتیجه :

II ـ یك جواب گویا با دو پارامتر معادلهٔ (I) از دستگاه (۸) بدست می‌آیدکه درآن β و γ اعدادگویا اختیاری می‌باشند (درحالت‌کلی γ مخالف صفر فرض می‌شود) و α به‌کمك رابطهٔ (۹) معین می‌شود .

با فرض $\gamma=2m$, و $\beta=2mn$ که در آن m و n اعداد صحیح می‌باشند نتیجه می‌شود .

III ـ اگر a،b،c اعدادصحیح باشند یك جواب صحیح با دوپارامتر (۱) عبارتست از :

$$t=h(\alpha,2mn,2m),$$
$$x=\alpha^2+8cm^2n+4acm^2,$$
$$y=4\alpha m-8bm^2n+4cm^2-4abm^2,$$

با شرط
$$\alpha=bm-a^2m-2amn-mn^2,$$

توجه ـ درنتیجه می‌توان با ضرب طرفین معادله :

$$kx^3+ax^2y+bxy^2+cy^3=t^2, \qquad k\neq 0,$$

در k^2 معادله را بفرم (۱) بدل نموده و جوابهای گویا و یا صحیح آنرا بدست آورد .

در حالتی‌که k و c مربع کامل باشند فرما روشی برای بدست‌آوردن جوابهای خصوصی معادلهٔ (۱۰) ابداع نمود . با فرض $k=d^2$ داریم :

$$d^2x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3=t^2, \quad \text{......}(11)$$

با قراردادن $x=1$ و فرض

$$t=d+\frac{a}{2d}y.$$

خواهیم داشت :

$$\left(d+\frac{a}{2d}y\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4d^2}\right)y^2+cy^3=\left(d+\frac{a}{2d}y\right)^2,$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود :

$$y=\frac{1}{c}\left(\frac{a^2}{4d^2}-b\right).$$

بازاء این مقدار y یك مقدار برای t و در نتیجه یك جواب معادلهٔ (۱۱) بدست می‌آید .

۲۲ـ بررسی معادلهٔ :

$$kx^3+ax^2y+bxy^2+cy^3=t^3,$$

اگر فرض‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha^2 + 2c\beta\gamma + ac\gamma^2, \\ v &= 2\alpha\beta - 2b\beta\gamma + c\gamma^2 - ab\gamma^2, \\ w &= 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2a\beta\gamma - b\gamma^2 + a^2\gamma^2, \end{aligned}\right\} \quad \text{.........(۱)}$$

با توجه به معادلات (۵) ، (۶) ، (۷) بند قبل می‌توان نوشت .

$$[h(\alpha,\beta,\gamma)]^3 = h(\rho,\sigma,\tau) \quad \text{.........(۲)}$$

که درآن:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \alpha u + c\gamma v + c\beta w + ac\gamma w, \\ \sigma &= \beta u + \alpha v - b\gamma v - b\beta w + c\gamma w - ab\gamma w, \\ \tau &= \gamma u + \beta v + \alpha w + a\gamma v + a\beta w - b\gamma w + a^2\gamma w. \end{aligned}\right\} \quad (۳)$$

برای بدست‌آوردن یك جواب معادله :

$$x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 = t^3, \quad \text{.........(۴)}$$

بایستی :

$$t = h(\alpha,\beta,\gamma), \qquad x = \rho, \qquad y = \sigma, \qquad \tau = 0, \quad \text{.........(۵)}$$

درنتیجه $\tau = 0$ معادله شرط مقادیر اختیاری α،β،γ می‌باشد .

با نوشتن مقدار τ برحسب α،β،γ داریم :

$$\begin{aligned} \tau = {} & 3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2 + 3(a^2-b)\alpha\gamma^2 + 2(a^3+3a-ab)\alpha\beta\gamma + \\ & + a\beta^3 + 3(a^2-b)\beta^2\gamma + (a^3-4ab+3c)\beta\gamma^2 + \\ & + (a^4-3a^2b+2ac+b^2)\gamma^3. \quad \text{.........(۶)} \end{aligned}$$

بازاء یك جواب غیرمشخص معادلهٔ $\tau = 0$ یك جواب معادلهٔ (۴) را داریم .

برای اینکه معادلهٔ $\tau = 0$ برحسب α دارای یك ریشهٔ گویا باشد مسلماً لازم وکافی است که عبارت :

$$\begin{aligned} & [3\beta^2 + 3(a^2-b)\gamma^2 + 2(a^3+3a-ab)\beta\gamma]^2 - \\ & - 12\gamma[a\beta^3 + 3(a^2-b)\beta^2\gamma + (a^3-4ab+3c)\beta\gamma^2 + \\ & + (a^4 - 3a^2b + 2bc + \gamma^2)\gamma^3], \end{aligned}$$

مربع کامل باشد این مربع کامل را m^2 می‌نامیم بنابراین می‌توان نوشت :

$$۹\beta^۴+۱۲(a^۳+۲a-ab)\beta^۳\gamma+$$
$$+۲(۲a^۶+۱۲a^۴-۴a^۴b+۹a^۲-۱۲a^۲b+۲a^۲b^۲+۹b)\beta^۲\gamma^۲$$
$$+۱۲(a^۵+۳a^۴-a^۳-۲a^۳b+ab+ab^۲-۳c)\beta\gamma^۳+$$
$$+(-a^۴+۶a^۲b-b^۲-۸ac)\gamma^۴=m^۲, \quad \text{(۷)}$$

که بعداً روش محاسبهٔ جوابهای این معادله را خواهیم دید .

یك جواب خصوصی معادلهٔ (۷) کاملاً روشن است که بازاء $\gamma=۰$ حاصل می‌شود و برای معادلهٔ (۴) جواب زیر بدست می‌آید :

$$t=۲a^۳-۹ab+۲۷c,$$
$$x=۲۷c-a^۳,$$
$$y=۹a^۲-۲۷b,$$

ولی این جواب خصوصی را با روش فرما خیلی سریعتر می‌توان بدست آورد که بعداً خواهیم دید .

بدیهی است که معادلهٔ بفرم :

$$k^۳x^۳+ax^۲y+bxy^۲+cy^۳=t^۳, \quad \text{(۸)}$$

را می‌توان با ضرب طرفین در $k^۶$ و تبدیل $k^۳x$ به x بفرم معادلهٔ (۴) درآورد .

روش دیگری برای ساده کردن معادلهٔ فوق عبارتست از :

در معادلهٔ (۸) x را به

$$kx-\frac{a}{۳k^۲}y.$$

تبدیل می‌نمائیم ، خواهیم داشت :

$$k^۳x^۳+pxy^۲+qy^۳=t^۳. \quad \text{(۹)}$$

این معادله را می‌توان چنین نوشت :

$$(t-kx)(t^۲+kxt+k^۲x^۲)=y^۲(px+qy).$$

و آن با نوشتن

$$m(t-kx)=ny.$$

$$n(t^۲+kxt+k^۲x^۲)=m(pxy+۹y^۲).$$

برقرار است که در آن m و n مقادیر اختیاری می‌باشند و با اختیار کردن

$$t-kx=\frac{n}{m}y,$$

معادلهٔ دوم بصورت زیر درمی‌آید :

$$۳k^۲m^۲nx^۲-(pm^۳-۳kmn^۲)xy-(qm^۳-n^۳)y^۲=۰,$$

اگر مبین این معادله را به $m^۲\rho^۲$ نشان دهیم ملاحظه می‌کنیم که باتوجه به تساوی (۹) یك جواب معادله را فوراً می‌توان بدست آورد .

با توجه به اینکه اعداد گویای m، n، ρ صادق درمعادلهٔ :

$$p^۲m^۴+۱۲k^۲qm^۳n-۶km^۲n^۲-۳k^۲n^۴=\rho^۲, \qquad (۱۰)$$

می‌باشندملاحظه می‌شود که حل معادلهٔ (۹) به‌حل‌معادلهٔ (۱۰) بدل گردیده .

روش‌جالب دیگری‌برای بدست‌آوردن جوابهای خصوصی معادلهٔ عمومی

$$Ax^۳+Bx^۲y+Cxy^۲+Dy^۳=t^۳, \quad ....(۱۱)$$

وجود دارد این معادله را بصورت :

$$P^۳+Q=t^۳. \quad ....(۱۱')$$

می‌نویسیم که در آن P یك عبارت خطی برحسب x و y و Q حداقل دارای یك فاکتور خطی برحسب x و y می‌باشد . با انتخاب یك زوج مقدارمناسب برای x و y بطوریکه این فاکتور خطی موجود در Q صفر شود t را فوراً می‌توان محاسبه نمود و یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۱) را بدست آورد .

بعنوان مثال معادلهٔ :

$$x^۳-۵x^۲y-۶xy^۲+۸y^۳=t^۳. \quad ....(۱۲)$$

را می‌توان بصورت ۵ فرم زیر نوشت :

$$۸y^۳+x(x+y)(x-۶y)=t^۳,$$

$$x^۳-(x+۲y)(۵x-۴y)y=t^۳,$$

$$(x-\frac{۵}{۳}y)^۳-\frac{y^۲}{۲۷}(۳۸۷x-۳۴۱y)=t^۳,$$

$$(x+2y)^3-xy(11x+18y)=t^3,$$

$$(2y-\frac{x}{2})^3+\frac{x^2}{8}(9x-52y)=t^3,$$

که دارای جوابهای خصوصی زیر می‌باشد .

$x=1,\quad y=-1;\quad x=6,\quad y=1;\quad x=2,\quad y=-1;$

$x=4,\quad y=5;\quad x=341,\quad y=387;$

$x=18,\quad y=-11;\quad x=52,\quad y=9;$

یك حالت خصوصی این روش مربوط به فرما می‌باشد در این‌حالت A و یا D مکعب کامل است . فرض‌کنیم $A=a^3$ باشد در این‌حال :

$$P=ax+\frac{B}{3a^2}y.$$

و معادله بصورت :

$$(ax+\frac{B}{3a^2}y)^3+y^2(Cx-\frac{B^2}{3a^2}x+Dy-\frac{B^3}{27a^6}y)=t^3,$$

درمی‌آید یعنی بازاء $A=a^3$ در همهٔ حالات یك جواب وجود دارد . حالت $D=b^3$ نیز مشابه همین حالت است . چون با تبدیل $\frac{x}{y}$ و $\frac{t}{y}$ (با تقسیم طرفین معادله به y^3) در معادله (۱۱) به x و t معادله به صورت :

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=t^3,\text{..................}(13)$$

درمی‌آید بنابراین جوابهای گویای معادلهٔ (۱۳) را نیزمی‌توان بدست‌آورد.

فرما نشان داد که با دردست داشتن یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۳) می‌توان جوابهای دیگری را طبق روش زیر بدست آورد :

فرض‌کنیم $x=m$ و $t=s$ یك جواب باشند در معادلهٔ (۱۳) x را به $m+\xi$ بدل می‌نمائیم معادله به صورت :

$$\overline{A}\xi^3+\overline{B}\xi^2+\overline{C}\xi+s^3=t^3,\qquad(14)$$

درمی‌آید در این معادله تبدیل :

$$t=s+\frac{\overline{C}}{3s^2}\xi$$

را جایگزین نموده و فوراً یك مقدار گویا برای ξ و با جمع این مقدار ξ با m یك مقدار جدید برای x که یك جواب معادلهٔ (۱۳) می‌باشد بدست می‌آوریم با ادامهٔ عمل همین طور جوابهای سوم و چهارم و ...... و بالاخره بی‌نهایت جواب می‌توان نتیجه گرفت .

مثال ـ محاسبهٔ ریشه‌های گویای معادلهٔ :

$$x^{۳}-۵x^{۲}+x+۴=t^{۳}.$$

این معادله دارای جواب $x=t=۱$; می‌باشد .

بافرض $x=\xi+۱$ نتیجه می‌شود :

$$\xi^{۳}-۲\xi^{۲}-۶\xi+۱=t^{۳}.$$

با تبدیل $t=۱-۲\xi$ و با جایگزین کردن و حل معادله برحسب ξ خواهیم داشت : $\xi=\frac{۱۴}{۹}$, و درنتیجه برای معادله دسته جواب دوم $x=\frac{۲۳}{۹}$, و $t=-\frac{۱۹}{۹}$ حاصل می‌شود با ادامهٔ عمل می‌توان جواب سوم و..... را بدست آورد .

۲۳ـ بررسی معادلهٔ :

$$x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz=u^{۳}+v^{۳}+w^{۳}-۳uvw, \quad \text{..........(۱)}$$

می‌توان نوشت :

$$\frac{x+y+z}{u+v+w}=\frac{u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}-uv-vw-wu}{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-yz-zx},$$

با فرض

$$u=w+\alpha, \quad v=w+\beta, \quad x=z+\gamma, \quad y=z+\delta, \quad \text{..........(۲)}$$

$$\therefore \quad \frac{x+y+z}{u+v+w}=\frac{\alpha^{۲}-\alpha\beta+\beta^{۲}}{\gamma^{۲}-\gamma\delta+\delta^{۲}}, \quad \text{..........(۳)}$$

با ضرب صورت و مخرج (۳) درمخرج و تبدیل نتیجه داریم :

$$\frac{x+y+z}{u+v+w}=\frac{\alpha_{۱}{}^{۲}-\alpha_{۱}\beta_{۱}+\beta_{۱}{}^{۲}}{(\gamma^{۲}-\gamma\delta+\delta^{۲})^{۲}}=\alpha_{۲}{}^{۲}-\alpha_{۲}\beta_{۲}+\beta_{۲}{}^{۲}.$$

که در آن $\alpha_{۲}$ ، $\beta_{۲}$ (وقتی u،v،w،x،y،z گویا باشند) گویا می‌باشند .

با فرض :

$$a=\frac{\alpha_۲+\beta_۲}{۲}\ ,\qquad b=\frac{\alpha_۲-\beta_۲}{۲}\ ,$$

معادلهٔ قبل بصورت زیر درمی‌آید :

$$x+y+z=(a^۲+۳b^۲)(u+v+w),\text{..................}(۴)$$

بنا به معادلات (۳) و (۴) داریم :

$$(a^۲+۳b^۲)(\gamma^۲-\gamma\delta+\delta^۲)=\alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲.$$

که می‌توان آنرا بفرم زیر نوشت :

$$(a^۲+۳b^۲)\left[\left(\frac{\gamma+\delta}{۲}\right)^۲+۳\left(\frac{\gamma-\delta}{۲}\right)^۲\right]=\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)^۲+۳\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)^۲ \quad (۵)$$

معادلهٔ (۵) درصورتی برقرار است که :

$$\left.\begin{aligned}&a(\gamma+\delta)+۳b(\gamma-\delta)=\alpha+\beta,\\&a(\gamma-\delta)-b(\gamma+\delta)=\alpha-\beta,\end{aligned}\right\}\text{..................}(۶)$$

ازمعادلهٔ متجانس (۱) نتیجه می‌شود که اگر هریك ازاعداد x،y،z و u،v،w در جواب گویای خصوصی در یك عددگویا ضرب و یا تقسیم شود اعدادحاصل تشکیل یك جواب گویای دیگر رامی‌دهند بدون اینکه ازعمومیت مسأله‌کاسته شود می‌توان فرض نمود $u+v+w=۱$; و باتوجه بهمعادلهٔ (۴) داریم :

$$u+v+w=۱;$$

$$x+y+z=a^۲+۳b^۲,$$

و باتوجه به معادلات (۲) :

$$\left.\begin{aligned}&\alpha+\beta=۱-۳w,\\&\gamma+\delta=a^۲+۳b^۲-۳z,\end{aligned}\right\}\text{..................}(۷)$$

از معادلات (۷) و (۶) می‌توان α،β،γ و δ را برحسب w و z بدست‌آورد و با جایگزین کردن نتایج حاصل درمعادلات (۶) خواهیم داشت :

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{-(a-3b)(a^2+3b^2-3z)+1-3w}{6b}+z,\\
y&=\frac{(a+3b)(a^2+3b^2-3z)-1+3w}{6b}+z,\\
u&=\frac{-(a^2+3b^2)(a^2+3b^2-3z)+(a+3b)-3w(a+3b)}{6b}+\\
&\qquad +w,\\
v&=\frac{(a^2+3b^2)(a^2+3b^2-3z)-(a-3b)+3w(a-3b)}{6b}+\\
&\qquad +w,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

که درآن z و w مقادیر اختیاری می‌باشند ، ویك جواب گویای معادلهٔ (۳) با چهار پارامتر گویا می‌باشد . بافرض $z=w=0$, و ضرب مقادیرحاصل برای v،u،y،x در $6b$ بالاخره جواب زیر را برای معادلهٔ : $x^3+y^3=u^3+v^3$, نتیجه می گیریم :

$$\left.\begin{aligned}
x&=-(a-3b)(a^2+3b^2)+1,\\
y&=(a+3b)(a^2+3b^2)-1,\\
u&=-(a^2+3b^2)^2+(a+3b),\\
v&=(a^2+3b^2)^2-(a-3b),
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

این جواب را اولر و بنه هرکدام بطور جداگانه با روشهای مختلف بدست آورده‌اند .

اینك ثابت می کنیم که این مقادیر جواب عمومی معادلهٔ :

$$x^3+y^3=u^3+v^3 \tag{10}$$

می‌باشد . برای این‌منظور با تبدیل (Fujiwara 1912) :

$$a=\frac{\sigma+\rho}{2m},\quad b=\frac{\sigma-\rho}{6m},\quad n=\frac{\sigma^2+\sigma\rho+\rho^2}{3m},$$

و تغییر v،u،y،x به m^2 برابر مقدار اولیه جواب حاصل را می‌توان بفرم زیر نوشت :

$$x=-n\rho+m^2, \qquad y=n\sigma-m^2,$$
$$u=m\sigma-n^2, \qquad v=-m\rho+n^2 \qquad (11)$$

در این‌جا مقادیر ρ ، σ ، m و n پارامترهای اختیاری باشرط :

$$\sigma^2+\sigma\rho+\rho^2=3mn, \quad \text{..............} (12)$$

می‌باشد . برای اینکه ثابت کنیم مقادیر (۱۱) جواب عمومی معادلهٔ (۱۰) می‌باشند کافی است ثابت کنیم که اگر x، y، u، v یك جواب خصوصی معادلهٔ (۱۰) باشند با ضرب این مقادیر در یك عدد مناسب می‌توان مقادیری برای m، n، ρ، σ صادق درمعادلات (۱۱) و (۱۲) بدست آورد .

بنا به معادلهٔ (۱۱) داریم :

$$x+y=n(\sigma-\rho), \qquad u+v=m(\sigma-\rho);$$

یا

$$\frac{m}{n}=\frac{u+v}{x+y},$$

پس می‌توان نوشت :

$$m=\lambda(u+v), \qquad n=\lambda(x+y), \quad \text{..............} (13)$$

و باتوجه به معادلات (۱۱) می‌توان نوشت :

$$nv-mx=n^3-m^3.$$

و با کاربرد معادلهٔ (۱۳) داریم :

$$\lambda^2=\frac{v(x+y)-x(u+v)}{(x+y)^3-(u+v)^3}.$$

چون صورت و مخرج متجانس و اولی از درجهٔ (۲) و دومی ازدرجهٔ (۳) می‌باشد بدیهی است که این معادله بازاء $\lambda=1$ برقرار است . مشروط براینکه x، y، u، v به ترتیب به τx، τy، τu، τv تبدیل شوند (τ مناسب محاسبه می‌شود) با قراردادن همین مقادیر ضرب شده τ درمعادلات (۱۱) و (۱۳) ملاحظه می‌شود که از معادلهٔ (۱۳) مقادیر m و n و از معادلهٔ (۱۱) مقادیر ρ و σ حاصل می‌شود .

حال باید ثابت کنیم که رابطهٔ (۱۲) برقراراست . با جایگزین‌مقادیر x، y، u، v صادق در معادلهٔ (۱۱) ، در معادلهٔ (۱۰) داریم :

$$(-n\rho+m^2)^3+(n\sigma-m^2)^3+(-m\sigma+n^2)^3+(m\rho-n^2)^3=0$$

نتیجه می‌شود :

$$(m^3-n^3)(\rho-\sigma)(\rho^2+\rho\sigma+\sigma^2-3mn)=0,$$

و از آنجا اگر $m=n$, باشد نتیجه می‌شود : $x=v$, و $y=u$ و اگر $\rho=\sigma$ باشد داریم $x=-y$ و $u=-v$ و باکنارگذاشتن این دو حالت ملاحظه می‌شود که معادلهٔ (۱۲) برقرار بوده ودرنتیجه معادلات (۱۱) باشرط (۱۲) و یا معادلات (۹) جوابهای عمومی معادلهٔ (۱۰) می‌باشند .

اگر درمعادلات (۹) مقادیر $a=0$ و $b=\frac{1}{2}$ را قراردهیم و نتایج حاصل برای x، y، u، v را در ۱۶ ضرب کنیم رابطهٔ زیر را بدست می‌آوریم:

$$34^3+2^3=15^3+33^3;$$

۲۴ـ ثابت کنید معادلهٔ :

$$x^3+y^3=2^m z^3;$$

برحسب اعداد صحیح x، y، z دارای جواب نمی‌باشد .

ابتدا حالت خاص $m=0$, یعنی معادلهٔ :

$$x^3+y^3=z^3, \quad \text{.........} (1)$$

را در نظر می‌گیریم. برای اینکه ثابت کنیم این معادله برحسب اعداد صحیح x، y، z که همگی مخالف صفر باشند دارای جواب نمی‌باشد به اثبات چند لم می‌پردازیم تمام اعداد بکاررفته در این لم‌ها اعداد صحیح می‌باشند :

لم I ـ اگر عددی را بتوان بفرم $\alpha^2+3\beta^2$ نوشت بطوریکه حاصل تقسیم $\alpha^2+3\beta^2$ بر عدد اول a^2+3b^2 مساوی عدد صحیح m شود m را می‌توان بفرم $\gamma^2+3\delta^2$ بیان نمود .

لم II ـ هرعدد اول بفرم $6n+1$ را فقط به‌یك طریق می‌توان بفرم a^2+3b^2 نوشت. هیچ‌یك ازاعداداول بفرم $6n-1$ مقسوم‌علیه‌یك عدد بفرم a^2+3b^2 که در آن a و b نسبت بهم اولند نمی‌باشند .

لم III ـ اگر p یك عدد اول بفرم $6n+1$ و $p=a^2+3b^2$ و m یك عدد صحیح غیرمشخص بطوریکه $pm=\alpha^2+3\beta^2$ باشد یك طرز نمایش بصورت مجموع دومربع صحیح برای m بصورت زیروجود دارد :

$$m=\left(\frac{a\alpha\pm 3b\beta}{a^2+3b^2}\right)^2+3\left(\frac{\alpha b\mp a\beta}{a^2+3b^2}\right)^2, \quad \text{......................(۲)}$$

بطوریکه نمایش $\alpha^2+3\beta^2$ عدد pm از طرز نمایش آنها موافق رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)=(ac+3bd)^2+3(ad-bc)^2,$$

نتیجه : اگر h عدد مرکبی باشد که عوامل اول متشکله‌اش بفرم $6n+1$ باشند h را می‌توان بفرم a^2+3b^2 نمایش داد وآن ازضرب طرز نمایش عوامل اول وضرب آنها موافق رابطهٔ قبل حاصل می‌شود.

لم ۱ـ

$$m=\frac{\alpha^2+3\beta^2}{a^2+3b^2}=\frac{(\alpha^2+3\beta^2)(a^2+3b^2)}{(a^2+3b^2)^2}=$$

$$=\frac{(a\alpha\pm 3\beta b)^2+3(\alpha b\mp\beta a)^2}{(a^2+3b^2)^2}=$$

$$=\left(\frac{a\alpha\pm 3\beta b}{a^2+3b^2}\right)^2+3\left(\frac{\alpha b\mp\beta a}{a^2+3b^2}\right)^2 .$$

کافی است ثابت کنیم که $a\alpha\pm 3\beta b$ مضربی از a^2+3b^2 و درنتیجه حاصلضرب این دومقدارمضربی‌از a^2+3b^2 می‌باشد. چون a^2+3b^2 عدد اول می‌باشد .

$$a^2\alpha^2-9\beta^2b^2=a^2(\alpha^2+3\beta^2)-3\beta^2(a^2+3b^2)$$

$$=ma^2(a^2+3b^2)-3\beta^2(a^2+3b^2)=$$

$$=(ma^2-3\beta^2)(a^2+3b^2)$$

لم ۲ـ را می‌توان با روشی مشابه با استدلال قضیهٔ معروف فرما (هر عدداول بفرم $4n+1$ را فقط به‌یك طریق می‌توان بصورت مجموع دومربع کامل نوشت) اثبات نمود .

لم ۳ـ نتیجه‌ای است از لم (۱)

این لم‌ها درجستجوی جواب عمومی معادلهٔ :

$$p^2+3q^2=s^3, \quad \text{......................(۳)}$$

که در آن p و q اعداد صحیح و نسبت بهم اولند و s عددیست فرد ، بکار می‌روند .

بدیهی است s باید بصورت :

$$s=t^{۲}+۳u^{۲}, \qquad \text{.........} (۴)$$

باشد . که در آن t و u اعداد صحیح می‌باشند و با استفادهٔ مکرر از فرع فوق داریم :

$$p=t^{۳}-۹tu^{۲}, \qquad q=۳u(t^{۲}-u^{۲}), \qquad \text{.........} (۵)$$

معادلات (۴) و (۵) تمام جوابهای صحیح معادلهٔ (۳) را بما می‌دهند مشروط برآنکه p و q نسبت بهم اول و s فرد باشد .

اکنون به‌معادلهٔ (۱) برمیگردیم روش‌اثبات‌آنست‌که فرض‌کنیم معادلهٔ (۱) دارای یکدسته جواب x، y، z مخالف صفر می‌باشد و از آنجا تناقضی بدست آوریم .

فرض‌کنیم d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوتای آنها باشد در نتیجه d مقسوم علیه سومی نیز خواهد بود . معادلهٔ (۱) را در این صورت به $d^{۳}$ تقسیم می‌کنیم و معادله‌ای بهمان صورت عاید می‌شود که درآن x، y، z نسبت بهم اولند پس بدون‌آنکه ازعمومیت مسأله‌کاسته شود می‌توان درمعادلهٔ مزبور x، y، z را نسبت بهم اول فرض‌کرد و بسهولت نتیجه خواهد شد که از اعداد x، y، z دوتا فرد و سومی زوج است . فرض می‌کنیم‌که x و y فرد باشند (این فرض از عمومیت مسأله نمی‌کاهد چون $x^{۳}=z^{۳}+(-y)^{۳}$ اکنون با قراردادن

$$x+y=۲p, \qquad x-y=۲q,$$

و درنتیجه $x=p+q$ و $y=p-q$ بطوریکه p و q نسبت‌بهم اول بوده و یکی ازآنها فرد و دیگری زوج است با قراردادن این‌مقادیر درمعادلهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$۲p(p^{۲}+۳q^{۲})=z^{۳}. \qquad \text{.........} (۶)$$

بنابراین ازمعادله روشن است که p زوج است چون $p^{۲}+۳q^{۲}$ فرداست . بالنتیجه q فرد می‌باشد و چون p و q نسبت بهم اولند نتیجه می‌شود که بزرگترین مقسوم علیه مشترك p و $p^{۲}+۳q^{۲}$ برابر ۱ و یا ۳ می‌باشد .

این دوحالت را بطور مجزا بررسی می‌کنیم .

حالت اول ـ وقتی بزرگترین مقسوم علیه مشترك p و p^2+3q^2 يك است . در این صورت p بر ۳ بخش‌پذیر نیست . و بنا به معادلهٔ (۶) خواهیم داشت :

$$2p=r^3, \qquad p^2+3q^2=s^3, \quad\cdots\cdots(7)$$

ودربالا دیدیم که معادلهٔ اخیر فقط وقتی جواب داردکه p و q بوسیلهٔ معادلهٔ (۵) تعیین شوند و چون q فرد است از معادلهٔ دوم (۵) نتیجه می‌شود که u فرد و t زوج است . ازطرف دیگر بنا به معادلهٔ اول (۵) دیده می‌شود t بر ۳ بخش‌پذیر نیست . بعلاوه t و u نسبت بهم اولند زیرا p و q چنین‌اند.
باتوجه باین دومقدار p رابطهٔ :

$$2t(t+3u)(t-3u)=r^3.$$

بدست می‌آید و بدیهی است که سه عامل طرف اول معادله دوبدو نسبت بهم اولند درنتیجه هریك ازآنها مکعب‌کامل است و چون به‌ترتیب آنها رابصورت μ^3 و ρ^3 و σ^3 فرض‌کنیم خواهیم داشت :

$$\rho^3+\sigma^3=\mu^3, \quad\cdots\cdots(8)$$

بسهولت می‌توان تحقیق‌کردکه اعداد ρ و σ از حیث قدرمطلق از اعداد xوy کوچکترند از طرف دیگر دوتای آنها فرد بوده و μ مخالف صفر است .

حالت دوم ـ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك p و p^2+3q^2سه‌است .
بافرض $p=3p_1$ بنا به معادلهٔ (۶) داریم :

$$6p_1=9r^3; \qquad 9p_1^2+3q^2=3s^3,$$

یا

$$2p_1=3r^3, \qquad q^2+3p_1^2=s^3,$$

ملاحظه می‌شودکه p_1 زوج است و درنتیجه q فرد است وچون (۵) را بعنوان حل عمومی معادلهٔ (۳) درنظر بگیریم دیده می‌شود که p_1 و q بصورت زیر می‌باشند :

$$q=t^3-9tu^2, \qquad p_1=3u(t^2-u^2),$$

چون p_1 زوج است از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که u زوج و t فرد است
بنا به این دومقدار p_1 داریم :

$$(2u)(t+u)(t-u)=r^3,$$

واضح است که سه عامل طرف اول این معادله دوبدو نسبت بهم اولند و مانند حالت اول به معادله‌ای بصورت (۸) می‌رسیم که همان خواص را دارد.

درنتیجه از معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$ که در آن x، y، z مخالف صفر و دوبدو نسبت بهم اول می‌باشند بمعادلهٔ دیگری بصورت $x_1{}^3+y_1{}^3=z_1{}^3$، می‌رسیم که درآن x_1 و y_1 ازلحاظ قدرمطلق کوچکتر باشد و این عمل را تا بی‌نهایت‌می‌توان‌ادامه‌داد واین‌بدیهی‌است که غیرممکن‌است وازاین‌تناقض‌نتیجه می‌گیریم که **معادلهٔ (۱) بازاء اعداد x، y، z مخالف صفرداری جواب نیست.**

اکنون بحالت:

$$x^3+y^3=2^m z^3, \qquad \text{(۹)}$$

برمی‌گردیم. بنابرآنچه تاکنون بدست آمد هرگاه m مضرب سه باشد این معادله غیرممکن‌است. این‌حالت راکنارمی‌گذاریم. بدیهی‌است که x و y یاهردوفردندیازوج‌می‌باشندا گرهردوزوج باشندمی‌توان‌معادله رابرقوهٔمناسبی از ۲ تقسیم کرد بطوریکه x و y حاصل فرد باشند و این مطلب ممکن است موجب شود که مقدار m تغییر کند.

پس ازآنکه x و y را بصورت فرد درآوردیم فرض می‌کنیم m طوری انتخاب شده باشد که z نیزفرد باشد. اکنون‌اثبات خواهیم‌کرد معادلهٔ ساده‌ـ شده‌ای به این صورت غیرممکن است دارای جوابهای صحیح غیرصفر بجز $x=y=z$، (که به‌ازاء $m=1$ بدست می‌آید) باشد. بدیهی است که کافی است این قضیه را درحالتی که x و y نسبت بهم اولند اثبات‌کنیم معادلهٔ (۹) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=2^m z^m.$$

دوعامل طرف‌اول بزرگترین‌مقسوم علیه مشترکشان ۱ و یا ۳ می‌باشد. چون x و y نسبت بهم اولند بالنتیجه x^2-xy+y^2 بیکی از فرمولهای r^3 و یا $3r^3$ می‌باشد در حالت اول می‌توان نوشت:

$$x^2-xy+y^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=r^3,$$

$$x+y=2^m s^3, \qquad \text{(۱۰)}$$

که درآن r و s اعداد فرد صحیح می‌باشند . درحالت دوم داریم :

$$x^2-xy+y^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=3r^2,$$
$$x+y=2^m\times 3^2\times s^3,$$

یا :

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=r^3,\quad x+y=2^m\times 3^2\times s^3,\quad (11)$$

که بطور اختصار آنرا اثبات می‌کنیم . معادلهٔ (۱۰) را درنظر گرفته و بنا به حالت اول و نظریه و خواص معادلهٔ (۳) آنرا می‌توان چنین نوشت :

$$r=t^2+3u^2,\quad \frac{x+y}{2}=t^3-9tu^2,\quad \frac{x-y}{2}=3u(t^2-u^2),$$

و بنا به معادلهٔ دوم (۱۰) داریم :

$$t(t-3u)(t+3u)=2^{m-1}s^3.$$

ولی t^2+3u^2, و r فرد و مساوی هم می‌باشند درنتیجه t^2-9u^2, فرد می‌باشد . بنابراین ازمعادلهٔ اخیر نتیجه می‌شودکه 2^{m-1} مضرب t می‌باشد و معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$t=2^{m-1}\mu^3;\qquad t-3u=\alpha^3,\qquad t+3u=\beta^3,$$

و ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$\alpha^3+\beta^3=2^m\mu^3.$$

بطریق‌مشابه بکمك معادلهٔ (۱۱) معادلهٔ جدیدی بفرم اخیررا می‌توان بدست‌آورد . درهریك حالات می‌توان ثابت‌نمودکه هریك از جوابها کوچکتر ازجواب قبلی است وبدین ترتیب به‌نتیجهٔ مطلوب بوسیلهٔ روش تنزل‌نامحدود فرما می‌رسیم .

۲۵- بررسی معادلهٔ :

$$h(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3-3xyz=t^n;\ \ldots\ldots(1)$$

معادلهٔ (۱) را با استفاده از عبارات فرم :

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)(u^3+v^3+w^3-3uvw)=$$
$$=r^3+s^3+t^3-3rst;\ \ldots\ldots(2)$$

می‌توان حل کرد و جوابهای آنرا بازاء مقادیر مختلف صحیح بدست‌آورد از رابطهٔ (۲) داریم :

$$r=\alpha u+\beta w+\gamma v;$$

$$s=\alpha w+\beta v+\gamma u;$$

$$t=\alpha v+\beta u+\gamma w;$$

اگر در رابطهٔ (۲) فرض‌کنیم $\alpha=u$, و $\beta=v$ و $\gamma=w$ خواهیم داشت :

$$[h(\alpha,\beta,\gamma)]^۲=h(\alpha^۲+۲\beta\gamma,\beta^۲+۲\alpha\gamma,\gamma^۲+۲\alpha\beta);\text{.........}(۳)$$

و ازآنجا جواب زیر را برای $n=۲$ برای معادله خواهیم داشت :

$$x=\alpha^۲+۲\beta\gamma,\ \ y=\beta^۲+۲\alpha\gamma,\ \ z=\gamma^۲+۲\alpha\beta,\ \ t=h(\alpha,\beta,\gamma)$$

بازاء $n=۳$ نیز می‌توان معادله را بصورت زیر حل نمود :

$$\begin{aligned}[h(\alpha,\beta,\gamma)]^۳&=[h(\alpha,\beta,\gamma)]^۲\cdot h(\alpha,\beta,\gamma)=\\&=h(\alpha^۲+۲\beta\gamma,\beta^۲+۲\beta\gamma,\gamma^۲+۲\alpha\beta)\cdot h(\alpha,\beta,\gamma)\\&=h(\alpha^۳+\beta^۳+\gamma^۳+۶\alpha\beta\gamma,۳(\alpha^۲\beta+\beta^۲\gamma+\gamma^۲\alpha),\\&\qquad ۳(\alpha\beta^۲+\beta\gamma^۲+\gamma\alpha^۲)].\end{aligned}$$

۲۶ـ بررسی معادلهٔ

$$x^۳+y^۳+z^۳=t^۳;\text{.........}(۱)$$

یك رشته از جوابهای صحیح معادلهٔ سیالهٔ فوق را می‌توان بکمك اتحاد :

$$(۳a^۲+۵ab-۵b^۲)^۳+(۴a^۲-۴ab+۶b^۲)^۳+$$
$$+(۵a^۲-۵ab-۳b^۲)^۳=(۶a^۲-۴ab+۴b^۲)^۳;$$

بدست آورد . روش حل مستقیم این معادله عبارتست از :

$$x^۳+y^۳=t^۳-z^۳.$$

با فرض $x-y=\alpha$ و $x+y=\beta$ و $t-z=\gamma$ و $t+z=\delta$ داریم :

$$\beta(\beta^۲+۳\alpha^۲)=\gamma(\gamma^۲+۳\delta^۲),$$

دراین‌معادله بافرض $\beta=m\gamma$ نتیجه می‌شود:

$$\gamma^۲+۳\delta^۲=m(m^۲\gamma^۲+۳\alpha^۲)$$

$$\therefore\quad (m^۳-۱)\gamma=۳(\delta^۲-۴\alpha^۲),$$

حال اگر m را چنان انتخاب کنیم که $m^{۳}-۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد بازاء $m=۴$ (اولین مقدار) خواهیم داشت :

$$۴\alpha^{۲}+۲۱\gamma^{۲}=\delta^{۲},$$

که در بند (۸) مورد مطالعه قرار گرفته

$$(\delta+۲\alpha)(\delta-۲\alpha)=(۵+۲)(۵-۲)\gamma^{۲},$$

و γ بصورت $(a^{۲}-b^{۲})$ می‌باشد در نتیجه :

$$\delta+۲\alpha=(۵+۲)(a+b)^{۲},$$
$$\delta-۲\alpha=(۵-۲)(a-b)^{۲},$$
$$\gamma=a^{۲}-b^{۲},$$

و از آنجا فوراً مقادیر x و y و z و t محاسبه می‌شوند (روش دیگری از این مسأله درکتاب روشهای جبر مندرج است)

معادلات درجه چهارم

۲۷- بررسی معادلهٔ

$$ax^{۴}+bx^{۳}y+cx^{۲}y^{۲}+dxy^{۳}+ey^{۴}=mz^{۲}, \qquad (۱)$$

با ضرب طرفین این معادله در m و تبدیل mz به z می‌توان m را کنار گذاشت با تقسیم طرفین معادله بر $y^{۴}$ و تبدیل $\frac{x}{y}$ به x و $\frac{z}{y^{۲}}$ به z معادله را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$ax^{۴}+bx^{۳}+cx^{۲}+dx+e=z^{۲}, \qquad (۲)$$

فرما برای تعیین ریشه‌های گویای این معادله حالات مختلف زیر را درنظر گرفت :

۱- e مربع کامل است $e=\varepsilon^{۲}$. در این‌حال با فرض $z=mx^{۲}+nx+\varepsilon$ (m و n اعداد گویا می‌باشند) و محاسبهٔ $z^{۲}$ یعنی:

$$z^{۲}=m^{۲}x^{۴}+۲mnx^{۳}+(n^{۲}+۲m\varepsilon)x^{۲}+۲n\varepsilon x+\varepsilon^{۲},$$

و مقایسهٔ آن با طرف اول معادلهٔ (۲) بجز برای ضرایب $x^{۴}$ و $x^{۳}$ نتیجه می‌شود :

$$n=\frac{d}{۲\varepsilon}, \qquad m=\frac{e}{۲\varepsilon}-\frac{d^{۲}}{۸\varepsilon^{۲}},$$

وبنابراین $ax^{4}+bx^{3}=m^{2}x^{4}+2mnx^{3},$

معادلهٔ اخیر درصورتی برقرار است که :

$$x=\frac{b-2mn}{m^{2}-a},$$

برای مثال معادلهٔ :

$$x^{4}+3x^{3}+5x^{2}+2x+1=z^{2},$$

دارای جواب $x=-\frac{1}{3}$ و $z=\frac{8}{9}$ می‌باشد.

۲ـ اگر $a=\alpha^{2}$ باشد . در این حال با فرض

$z=\alpha x^{2}+mx+n$ و عملی مشابه قبل نتیجه می‌شود :

$$m=\frac{b}{2\alpha}, \qquad n=\frac{c}{2\alpha}-\frac{b^{2}}{8\alpha^{3}}, \qquad x=\frac{n^{2}-e}{d-2mn},$$

برای مثال با کاربرد این روش برای معادلهٔ :

$$x^{4}+3x^{3}+5x^{2}+2x+1=z^{2},$$

یك جواب $x=-\frac{57}{136}$ محاسبه می‌شود .

۳ـ اگر a و e هردومربع کامل باشندبافرض $z=\alpha x^{2}+mx+\varepsilon$ و عملی مشابه قبل نتیجه می‌شود که :

$$m=\frac{d}{2\varepsilon}, \qquad x=\frac{c-m^{2}-2\alpha\varepsilon}{2\alpha m-b};$$

$$m=\frac{b}{2\alpha}, \qquad x=\frac{d-2m\varepsilon}{m^{2}+2\alpha\varepsilon-c};$$

بطور خلاصه اگر e و یا a مربع کامل باشند یك جواب خصوصی محاسبه می‌شود و اگر هردو مربع کامل باشند دوجواب خصوصی معادلهٔ (۲) محاسبه می‌شود .

حال بکمك یك جواب خصوصی معادلهٔ (۲) جوابهای دیگرآنرا بدست می‌آوریم .

فرض می‌کنیم $x=k$ و $z=p$ یك جواب خصوصی معادلهٔ (۲) باشد دراین معادله x را به $t+k$ بدل می‌کنیم واضح است که معادلهٔ جدیدی بفرم معادلهٔ (۲) حاصل می‌شود دراین معادله‌ثابت e برابر $p^۲$ می‌باشد وباکاربرد حالت (۱) می‌توان جواب دوم و سوم و چهارم و بالاخره بی‌نهایت جواب از آنرا بدست آورد .

برای مثال معادلهٔ

$$۲x^۴+۵x^۳+۷x^۲+۲=z^۲,$$

دارای جواب $x=۱$ و $z=۴$ می‌باشد . باتبدیل x به $t+۱$ معادلهٔ جدید بفرم :

$$۲t^۴+۱۳t^۳+۳۴t^۲+۳۷t+۱۶=z^۲,$$

حاصل می‌شود که در آن ۱۶ مربع کامل است بکمك حالت اول جواب دوم و سوم و بالاخره بی‌نهایت جواب ازآنرا می‌توان بدست آورد .

۲۸- بررسی معادلهٔ

$$ax^۴+by^۴=cz^۲, \quad \text{.........} (۱)$$

با ضرب طرفین معادله در $a^۳$ وتبدیل ax به x معادله به صورت زیر درمی‌آید :

$$x^۴+my^۴=nz^۲, \quad \text{.........} (۲)$$

m عددیست دلخواه فرض می‌کنیم n بصورت $s^۴+mt^۴$ نوشته شود (این فرض از عمومیت مسأله نمی‌کاهد)

$$x^۴+my^۴=(s^۴+mt^۴)z^۲, \quad \text{.........} (۳)$$

در این‌جا n,s,t اعداد معلوم و x,y,z اعداد مجهولی‌می‌باشند که بایدتعیین شوند .

ملاحظه می‌شود که می‌توان n را بدون اینکه از عمومیت مسأله بکاهیم محدود نمود، درحقیقت اگر یك جواب معادلهٔ (۲) معلوم باشد عددی مانند ρ وجود دارد بطوریکه مربع آن $\rho^۲$ طوریست که $n\rho^۲$ بفرم $s^۴+mt^۴$ باشد. و چون $x=s$ و $y=t$ و $z=۱$ یك جواب معادلهٔ (۳) می‌باشند با عملی

مشابه بند قبل یك جواب دیگر آنرا بدست می‌آوریم . باوجود این ، روش دیگری را بکار می‌بریم . فرض می‌کنیم :

$$z = p^2 + mq^2, \quad \text{......} (۴)$$

سپس مقادیر p و q و درنتیجه x و y متناظر را که معادلهٔ (۳) را برقرار می‌کند محاسبه می‌کنیم . بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x^4 + my^4 &= (s^4 + mt^4)(p^2 + mq^2)^2 \\ &= (s^4 + mt^4)[(p^2 - mq^2)^2 + m(2pq^2], \\ &= [s^2(p^2 - mq^2) + 2mt^2pq]^2 + \\ &\qquad + m[t^2(p^2 - mq^2) - 2s^2pq]^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x^2 &= s^2(p^2 - mq^2) + 2mt^2pq \\ y^2 &= t^2(p^2 - mq^2) - 2s^2pq \end{aligned}\right\} \text{......} (۵)$$

معادلات (۵) تشکیل یك دستگاهی را می‌دهند که فرما تحت عنوان **معادلات مضاعف** بررسی‌کرده است که درآن q, p, y, x مجهول می‌باشند .

اکنون معادلهٔ اول را درt^2 ودومی را درs^2 ضرب‌کرده وازهم تفریق می‌کنیم خواهیم داشت :

$$t^2x^2 - s^2y^2 = 2(s^4 + mt^4)pq.$$

$$\therefore \quad tx + sy = 2stp, \qquad tx - sy = \frac{(s^4 + mt^4)q}{st}$$

$$x = sp + \frac{(s^4 + mt^4)q}{2st^2},$$

$$y = tp - \frac{(s^4 + mt^4)q}{2s^2t}.$$

و با قراردادن مقدار x درمعادلهٔ (۵) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} 4s^2t^2(s^4 + mt^4)pq + (s^4 + mt^4)^2q^2 &= \\ &= 8ms^2t^6pq - 4ms^4t^4q^2. \end{aligned}$$

و این درصورتی برقرار است که :

$$p=(s^4+mt^4)^2+4ms^4t^4,$$
$$q=-4s^2t^2(s^4-mt^4).$$

در این‌صورت x,y,z عبارتند از :

$$x=s[(s^4+mt^4)^2+4ms^4t^4-2(s^8-m^2t^8)].$$
$$y=t[(s^4+mt^4)^2+4ms^4t^4+2(s^8-m^2t^8)].$$
$$z=[(s^4+mt^4)^2+4ms^4t^4]^2+16ms^4t^4(s^4-mt^4)^2.$$

که یك جواب صحیح خصوصی معادلهٔ (۳) می‌باشد بیاری این جواب و روش بند قبل می‌توان جوابهای دوم و سوم و بی‌نهایت جواب آنرا بدست‌آورد .

تمرین

مطلوبست حل معادلات زیر (معادلات Pepin درسال ۱۸۷۹)

۱ـ $7x^4-5y^4=2z^2,$ ۲ـ $x^4-140y^4=z^2,$

۳ـ $4x^4-35y^4=z^2,$ ۴ـ $3x^4-2y^4=z^2,$

۵ـ $x^4+7y^4=8z^2,$ ۶ـ $7x^4-2y^4=5z^2,$

۷ـ ثابت کنید بازاء $c=a+b$ یك جواب معادلهٔ $ax^4+by^4=cz^2$ را می‌توان بدست آورد .

۲۹ـ فرمهای دیگر معادلات درجه چهارم

در بند (۵) دیده شد معادله بشکل :

$$x^2+y^2=z^2, \quad \text{......}(1)$$

دارای جواب :

$$x=m^2-n^2, \qquad y=2mn, \qquad z=m^2+n^2,$$

می‌باشد . اگر معادلهٔ (۱) را مربع کرده وطرفین آنرا در z^4 ضرب و عبارت $x^4y^4-2z^4x^2y^2$ را بهرطرف اضافه کنیم داریم :

$$(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4=(z^4-x^2y^2)^2. \quad \text{......}(2)$$

با قراردادن مقادیر x و y و z در (۲) خواهیم داشت :

$$[2mn(m^2-n^2)]^4+[2mn(m^2+n^2)]^4+(m^4-n^4)^4=$$
$$=(m^8+14m^4n^4+n^8)^2,$$

با قراردادن $m=2$ و $n=1$ در این اتحاد داریم :

$$12^4+20^4+15^4=481^2;$$

و بالاخره با درنظر گرفتن اتحاد :

$$x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2, \quad \text{.........}(3)$$

و با توجه باینکه رابطهٔ $x^2+xy+y^2=(a^2+ab+b^2)^2$ بازاء $x=a^2-b^2$ و $y=2ab+b^2$ برقرار است اتحاد زیررا بدست می‌آوریم:

$$(a^2-b^2)^4+(2ab+b^2)^4+(a^2+2ab)^4=2(a^2+ab+b^2)^4$$

بکمك این رابطه یك جواب با دوپارامتر معادلهٔ :

$$x^4+y^4+z^4=2t^4;$$

را می‌توان بدست آورد . درحالت خاص :

$$3^4+5^4+8^4=2\times 7^4,$$

بطریق مشابه می‌توان اتحادی نتیجه گرفت که یك جواب با دوپارامتر معادلهٔ زیر را مشخص کند :

$$x^4+y^4+z^4=2u^{2k};$$

برای این منظور کافی است که x و y طوری تعیین شوند که :

$$x^2+xy+y^2=(a^2+ab+b^2)^{2k};$$

و با قرار دادن آن در (۳) اتحاد مطلوب بدست می‌آید . تعیین x و y را می‌توان مطابق بند ۵ و ۱۷ انجام داد.

مسألهٔ تعیین چهار عدد دومجذوری که مجموعشان مساوی یك عدد دو-مجذوری باشد . بنظر نمی‌رسد که تاکنون حل شده باشد . در مقابل بسهولت ثابت می‌شود که ۵ عدد دومجذوری می‌توانند مساوی یك عدد دومجذوری باشند کوچکترین اعداد صحیح صادق در این شرایط عبارتند از :

$$4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4;$$

اتحادهای بیشماری موجودند که یك جواب این مسأله را می‌دهند و آنها با روشهای ساده بدست می‌آیند دونمونه از این اتحادها عبارتند از :

$$\left.\begin{aligned}
&(8s^2+40st-24t^2)^4+(6s^2-44st-18t^2)^4+\\
&\quad+(14s^2-4st-42t^2)^4+(9s^2+27t^2)^4+\\
&\quad+(4s^2+12t^2)^4=(15s^2+45t^2)^4,\\
&(4m^2-12n^2)^4+(2m^2-12mn-6n^2)^4+\\
&+(4m^2+12n^2)^4+(2m^2+12mn-6n^2)^4+\\
&+(3m^2+9n^2)^4=(5m^2+15n^2)^4,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(4)$$

مسألهٔ دیگری که در اینجا پیش می‌آید حل معادلهٔ :

$$x^4+y^4=u^4+v^4,\quad\ldots\ldots(5)$$

می‌باشد . با قراردادن مقادیر :

$$x=a+b,\quad y=c-d,\quad u=a-b,\quad v=c+d,\quad\ldots\ldots(6)$$

در معادلهٔ (۵) داریم :

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2).$$

جوابهای کلی و صحیح این معادله درست نیست . اولر ملاحظه کرد این معادله با فرض :

$$\begin{aligned}
a&=g(f^2+g^2)(-f^4+18f^2g^2-g^4),\\
b&=2f(f^6+10f^4g^2+f^2g^4+4g^6),\\
c&=2g(4f^6+f^4g^2+10f^2g^4+g^6),\\
d&=f(f^2+g^2)(-f^4+18f^2g^2-g^4),
\end{aligned}$$

برقراراست . با این مقادیر a،b،c،d معادلهٔ (۶) یك جواب با دوپارامتر معادلهٔ (۵) را بدست می‌دهد .

فرمولهای جواب معادله :

$$x^4+y^4+z^4=u^4+v^4+w^4,$$

بوسیلهٔ اغلب ریاضیدانها بدست آمده است .

یك جواب با دوپارامتر معادلهٔ :

$$w^4+x^4+y^4+z^4=s^4+t^4+u^4+v^4,$$

را می‌توان از اتحادهای (۴) با فرض $n=s$ و $m=3t$ بدست آورد .

تمرین

۱ ـ ثابت کنید معادلهٔ : $x^2+y^3=z^6$, دارای جواب (بجز $x=y=z=0$) نیست .

۲ـ بکمك اتحاد :

$$(s^3-t^3+6s^2t+3st^2)^3+(t^3-s^3+6t^2s+3ts^2)^3=$$
$$=st\cdot(s+t)\cdot 3^3(s^2+st+t^2)^3.$$

ثابت کنیدمعادلهٔ دیوفانتی, $x^3+y^3=az^3$ بجزوقتی که $au^3=st(s+t)$ باشد دارای جواب گویا نیست .

۳ـ مطلوبست تعیین جوابهای عمومی معادلهٔ دیوفانتی :

$$x^3+y^3=u^3+v^3=s^3+t^3 \qquad \text{(Werebrussov, 1909)}$$

۴ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^3+y^3+z^3=2u^3$, بازاء $x=u+v$, و $y=u-v$ و $u=a^2m^3$ و $v=bn^3$ و $z=-6mn^2$ ، $ab=6$ برقرار است . و بکمك دوجواب ثابت کنید می‌توان سومی را بدست آورد .
(Werebrussov, 1908)

۵ـ بکمك یك جواب خصوصی معادلهٔ :

$$x^3+y^3+u^3+v^3=t^3,$$

ثابت کنید می‌توان یك جواب با دوپارامتر را بدست آورد .

۶ـ معادلهٔ $1+x+x^2+x^3=y^2$, را درنظر می گیریم ثابت کنید $x=7$ و $y=20$ تنها جواب درحالتی است که x یك عدد اول است .

۷ـ ثابت کنید هریك از معادلات زیر دارای جواب نیستند :

$$2x^3\pm 1=z^3; \qquad 2x^3\pm 2=z^3. \qquad \text{(Delannoy, 1897)}$$

۸ـ اگر $x=\alpha$ و $y=\beta$ و $z=\gamma$ یك جواب معادلهٔ $x^3+y^3=9z^3$ باشد . ثابت کنید جوابهای دیگری را می‌توان بکمك فرمولهای :

$$x=\alpha(\alpha^3+2\beta^3), \quad y=-\beta(\beta^3+2\alpha^3), \quad z=\gamma(\alpha^3-\beta^3)$$

بدست‌آورد · نتیجهٔ مشابهی را برای مسألهٔ $x^3+y^3=7z^3$, بدست‌آورید.
(Reali, 1878)

۹ ـ ثابت کنید معادلهٔ $x(x+1)=2y^3$, فقط دارای جوابهای $x=y=0$ و $x=y=1$ می‌باشد.

۱۰ـ ثابت کنید معادلهٔ $8x^3+1=y^2$ فقط دارای جوابهای $y=1$ و $x=0$ و $y=3$ و $x=1$ می‌باشد.

۱۱ـ ثابت کنید به کمك یك جواب خصوصی معادلهٔ $x^3+ay^3=bz^3$, می‌توان جواب دوم و به کمك جواب دوم جواب سوم و..... همین‌طور بی‌نهایت جواب بدست آورد. (لژاندر)

۱۲ـ مطلوبست یك جواب با دو پارامتر معادلهٔ :

$$x^3+y^3=z^2.$$

۱۳ـ مطلوبست یك جواب با سه پارامتر معادلهٔ :

$$x^2+3y^2=u^3+v^3,$$

راهنمائی ـ از اتحاد زیر استفاده کنید :

$$u^3+v^3=(u+v)\left[\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+3\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\right].$$

۱۴ـ مطلوبست تمام جوابهای :

۱ـ $x^3+y^3=u^2+v^2.$

۲ـ $x^3+y^3+z^3=u^3+v^3.$

راهنمائی ـ از اتحاد زیر استفاده کنید :

$$\Sigma(a+b-c)^3=(\Sigma a)^3-24abc.$$

۱۵ـ جوابهای عمومی معادلهٔ $t^3=x^3+y^3+1$ را بدست آورید.

۱۶ـ ازرابطهٔ $3^3+4^3+5^3=6^3$ رابطهٔ $7^3+14^3+17^3=20^3$ را نتیجه بگیرید.

معادلات درجه چهارم

۱۷ـ مطلوبست یك جواب با دوپارامتر هریك از معادلات زیر :

$$x^4+y^4+4z^4=t^4,$$
$$x^4+2y^4+2z^4=t^4,$$
$$x^4+8y^4+8z^4=t^4,$$
$$x^4+y^4+2z^4=2t^4,$$
$$x^4+y^4+8z^4=8t^4,\qquad \text{(Carmichael, 1913)}$$

۱۸ـ مطلوبست جوابهای معادلهٔ :

$$x^4+y^4+z^4=u^4+v^4,$$

۱۹ـ مطلوبست تعیین شش عدد که مجموع توان چهارم آنها نیز عدد با توان چهارم باشد .

۲۰ـ مطلوبست $n=7,8,9,10$ عدد دومجذوری که مجموع آنها نیز دومجذوری باشد .

۲۱ـ ثابت کنید $x=3$ و $y=1$ و $z=2$ تنها اعداد اولی هستند که معادلهٔ زیر را برقرار مینمایند:

$$x^4-y^4=5z^4,\qquad \text{(Fauquem bergue, 1912)}$$

۲۲ـ ثابت کنید معادلهٔ $x(x+1)=2y^4$, دارای جواب صحیحی جزء $x=y=0$ و $x=1=y$ نمی‌باشد .

۲۳ـ ثابت کنید تمام جوابهای معادلهٔ $x^4+35y^4=z^2$ را که ازحد مفروضی کوچکتر باشند می‌توان بدست‌آورد .

۲۴ـ مطلوبست جواب عمومی معادلهٔ :

$$x^4-8x^2y^2+8y^4=z^2,\qquad \text{(Pepin, 1898)}$$

۲۵ـ فرمولهائی را تعیین کنید که تمام جوابهای معادلهٔ زیر را بتوان با آنها بدست آورد :

$$ax^4+bx^2y^2+cy^4=dz^2,\qquad \text{(Aubry, 1911)}$$

۲۶ـ مطلوبست حل معادلهٔ $x^4+4hx^2y^2+(2h-1)^2y^4=z^2$, که درآن h طوری است که $4h-1$ و $2h-1$ اعداد اول می‌باشند .

(Pietrocola, 1898)

۲۷ـ مطلوبست تمام جوابهای :

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=z^2,$$ (Moret, Blanc, 1881)

۲۸ـ مطلوبست تمام جوابهای :

(۱) $x^4-5x^2y^2+5y^4=z^2.$ (Moret-Blanc, 1881)

(۲) $x^4-4x^2y^2+y^4=z^4.$ (Paraira, 1913)

(۳) $(x^2-y^2-2xy)^2-8x^2y^2=z^2.$ (Aubry, 1913)

مسائل متفرقه

۲۹ـ مطلوبست تمام جوابهای دستگاه دیوفانتی :

$$y=x^2+(x+1)^2, \qquad y^2=z^2+(z+1)^2,$$

و همچنین نتیجهٔ بالا را در مورد دستگاه $y=x^2+t(x+\alpha)^2$ و $y^2=z^2+t(z+\beta)^2$ بکار برید . (Jonquieres, 1878)

۳۰ـ مطلوبست بحث معادلهٔ :

$$x=4y^2+1, \qquad x^2=z^2+(z+1)^2,$$ (Gerono, 1878)

۳۱ـ مطلوبست یك جواب با یك پارامتر دستگاه :

$$x^2+y^2-1=u^2, \qquad x^2-y^2-1=v^2.$$

۳۲ـ اتحاد :

$$(s^2-2st-t^2)^4+(2s+t)s^2t(2t+2s)^4=$$
$$=(s^4+t^4+10t^2s^2+4st^3+12s^3t)^2,$$

را برای حل بعضی از معادلات دیوفانتی بکار برید (Desbores, 1878)

۳۳ـ مطلوبست تمام جوابهای

$$(x+1)^y=x^{y+1}+1;$$ (Meyl, 1876)

۳۴ـ مثلث قائم‌الزاویه را تعیین کنید که مجموع سطح و یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه‌اش مربع کامل باشد .

۳۵ـ مطلوبست تمام جوابهای معادلهٔ $x^y=y^x$.

۳۶ـ مطلوبست تمام جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ :

$$4x^3-y^3=3x^2yz^2.$$ (Swinden, 1912)

۳۷ـ ثابت کنید دستگاه $xy+x+y=a^2$ و $xy-x-y=b^2$ برحسب مقادیر صحیح x و y و a و b که همگی مخالف صفر باشند غیرـ ممکن است . (Aubry, 1911)

۳۸ـ مطلوبست تمام جوابهای گویای دستگاه معادلات :

$$ax^2+b=u^2, \qquad cx^2+d=t^2,$$ (Welmin, 1912)

۳۹ـ مطلوبست تمام جوابهای معادلهٔ :

$$m\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}+n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y}=k\frac{\pi}{4},$$

برحسب اعداد صحیح k،n،x،y و ثابت کنید که فقط دارای چهارجواب زیر می‌باشد :

$1,1,1,2,3;\quad 1,2,-1,2,7;\quad 1,2,1,3,7;\quad 1,4,-1,5,239;$

(Störmer, 1899)

۴۰ـ برای هریك از معادلات زیر یك جواب با دو پارامتر یا بیشتر بدست آورید :

$$x^3+y^3+z^3=2t^3,$$
$$x^3+y^3+z^3=2t^{9k},$$
$$x^3+y^3+z^3+u^3=3t^3,$$
$$x^3+y^3+z^3+u^3=kt^m,$$
$$x^3+2y^3+3z^3=t^3,$$
$$x^3+2y^{3m}+3z^{3n}=t^3,$$ Carmichael, 1913)

۴۱ ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^2-2=m(y^2+2)$, دارای جواب نیست (فرما)

۴۲ـ ثابت کنید معادلهٔ $2x^2-1=(2y^2-1)^2$, دارای فقط یك جواب $x=5$ و $y=2$ می‌باشد (فرما ۱۸۸۴)

۴۳ـ مطلوبست جواب دستگاه $x+y=u^2$ و $x^2+y^2=v^4$ (اولر)

۴۴ـ مطلوبست حل هریك از معادلات دیوفانتی :

$$z^2(x^2+y^2)=(xy)^2, \qquad xy=z(x+y),$$

۴۵ـ مطلوبست یك جواب دستگاه دیوفانتی $x^{2}+y^{2}+z^{2}=u^{2}$, و $x^{3}+y^{3}+z^{3}=v^{3}$, (Martin, Davis 1898)

۴۶ـ اتحادهای زیر را برای حل معادلات دیوفانتی بکار برید :

$$(a^{2}-b^{2})^{8}+(a^{2}+b^{2})^{8}+(2ab)^{8}=2(a^{8}+14a^{4}b^{4}+b^{8})^{2}.$$

$$x^{8}+y^{8}+(x^{2}\pm y^{2})^{4}=2(x^{4}\pm x^{2}y^{2}+y^{4})^{2},$$

(Barisien, Visscher, 1911)

۴۷ـ مطلوبست جواب عمومی معادلهٔ :

$$x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+\cdots\cdots+x_{n}^{2}=xx_{1}x_{2}\cdots\cdots x_{n}$$ (Hurwitz, 1907)

۴۸ـ مطلوبست جوابهای معادلهٔ :

$$x^{3}+(x+r)^{3}+(x+2r)^{3}+\cdots\cdots+[x+(n-1)r]^{3}=y^{3},$$

(Genocchi, 1865)

مسائل مسابقات ریاضی شوروی (باحل)

از : واسیلی‌سیمینوویچ کوشچنکو ترجمه: پرویز شهریاری

تقارن درجبر

از : پرویز شهریاری

روشهای جبر

ترجمه و تألیف : پرویز شهریاری

حل‌المسائل‌جبر و مثلثات (برای دانش‌آموزان سال ششم‌طبیعی دبیرستانها)

از : امامی ، شهریاری ، ازگمی

راهنمای جبر کنکور (برای دانش‌آموزان سال ششم ریاضی دبیرستانها و داوطلبان کنکور دانشگاهها)

از : بهنیا ، چاوشیان ، قوام زاده

حل مسائل جبر

از : باقر امامی

مسائل امتحانی جبر (برای سال پنجم ریاضی دبیرستانها)

جدولهای لگاریتم

از : پرویز شهریاری ، باقر امامی

حل مسائل حساب استدلالی (برای سال ششم ریاضی)

از : ازگمی ، امامی ، شهریاری

شیمی معدنی

از : دکتر یحیی سلطانی

اصول الکتریسیته

از : دکتر مهندس حسینعلی انواری

اعداد اول

از : امیل بورل ترجمه : پرویز شهریاری

موسسه انتشارات امیرکبیر